Matemáticas I

3^{er} PARCIAL.

Guías 15 – 18

Farith Briceño - 2016

Material en revisión

Indice

15 Diferenciabilidad de una función. **499**

16 Reglas de derivación. **527**

17 Derivación implícita. **545**

18 Aplicación de la derivada. **559**

Diferenciabilidad de una función.

Objetivos a cubrir — Código : MAT-1.15

- Recta tangente a una curva. Velocidad instantánea de un móvil en un instante dado.
- Definición de derivada de una función real.
- Diferenciabilidad implica continuidad.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 15.1 *: Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva* $y = 5 - 2x^2$ *que pasa por el punto* $(-1, 3)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto dado es punto de tangencia, para ellos sustituimos $x = -1$ en la función y verificamos que se cumpla la igual, es decir, obtenemos que $y = 3$,

$$y(-1) = 5 - 2(-1)^2 = 5 - 2 = 3,$$

como se cumple la igualdad, concluimos que el punto $(-1, 3)$ **si** es punto de tangencia. Buscamos la pendiente de la recta tangente, es conocido que

$$m_{\tan} = f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h},$$

calculamos la pendiente por medio del límite, obtenemos

$$\begin{aligned} m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(5 - 2(-1+h)^2\right) - \left(5 - 2(-1)^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5 - 2(-1+h)^2 - 3}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{5 - 2(-1+(0))^2 - 3}{(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind.}, \end{aligned}$$

levantamos la indeterminación

$$\begin{aligned} m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{5 - 2(-1+h)^2 - 3}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2(-1+h)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\left(1 - (-1+h)^2\right)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \to 0} \frac{(1 - (-1+h))(1 + (-1+h))}{h} = 2 \lim_{h \to 0} \frac{(1+1-h)\ h}{h} \\ &= 2 \lim_{h \to 0} (2 - h) \overset{\text{S.I.}}{=} 2(2 - (0)) = 4 \end{aligned}$$

es decir, $m_{\tan} = 4$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - (3) = 4(x - (-1)) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y - 3 = 4(x + 1).}$$

★

Ejemplo 15.2 *: Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva* $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ *que pasa por el punto* $(1, 1)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto dado es punto de tangencia, para ellos sustituimos $x = 1$ en la función y verificamos que se cumpla la igual, es decir, obtenemos que $y = 1$,

$$y(1) = \frac{\sqrt{2(1) - 1}}{(1)} = \frac{\sqrt{2-1}}{1} = 1,$$

como se cumple la igualdad, concluimos que el punto $(1,1)$ **si** es de tangencia. Buscamos la pendiente de la recta tangente, es conocido que

$$m_{\tan} = f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$

calculamos la pendiente por medio del límite, obtenemos

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{2(1+h)-1}}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)}{1+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)}{h(1+h)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\sqrt{2(1+(0))-1} - (1+(0))}{(0)(1+(0))}$$

$$= \frac{\sqrt{2(1)-1} - (1)}{(0)(1)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind.},$$

levantamos la indeterminación aplicando conjugada

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)\right)}{h(1+h)} \frac{\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)}{\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(1+h)-1}\right)^2 - (1+h)^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h) - 1 - (1+h)^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 + 2h - 1 - \left(1 + 2h + h^2\right)}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h - 1 - 2h - h^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + 1 + h\right)} = 0,$$

es decir, $m_{\tan} = 0$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - (1) = 0\,(x - (1)) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = 1.}$$

★

Ejemplo 15.3 *: Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva* $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ *que pasa por el punto* $(3,0)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto dado es punto de tangencia, para ellos sustituimos $x = 3$ en la función y verificamos que se cumpla la igual, es decir, obtenemos que $y = 0$,

$$y(3) = \sqrt[3]{1-(3)} = \sqrt[3]{-2} \neq 0,$$

por lo tanto, $(2,2)$ **no** es punto de tangencia. Sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia, hasta los momentos desconocido. Si $P(x_0, y_0)$ es el punto de tangencia, entonces, sus coordenadas son

$$P(x_0, y_0) = P\left(x_0, \sqrt[3]{1-x_0}\right).$$

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia P viene dada por

$$m_{\tan} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

calculamos la pendiente por medio del límite, obtenemos

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-(x_0+h)} - \sqrt[3]{1-x_0}}{h} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind.},$$

levantamos la indeterminación, aplicando la conjugada

$$\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-(x_0+h)} - \sqrt[3]{1-x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-(x_0+h)} - \sqrt[3]{1-x_0}}{h} \; \frac{\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^3}{h\left(\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-(x_0+h) - (1-x_0)}{h\left(\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-x_0-h-1+x_0}{h\left(\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\left(\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-(x_0+h)}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+h)}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2} \\
&\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-(x_0+(0))}\right)^2 + \sqrt[3]{1-(x_0+(0))}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2 + \sqrt[3]{1-x_0}\;\sqrt[3]{1-x_0} + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1-x_0}\right)^2} = -\frac{1}{3(1-x_0)^{2/3}},
\end{aligned}$$

luego, la pendiente de la recta tangente es $m_{\tan} = f'(x_0) = -\dfrac{1}{3(1-x_0)^{2/3}}$ y la ecuación de la recta tangente sería

$$y - y_0 = m_{\tan}\,(x-x_0), \qquad \text{es decir,} \qquad y - \sqrt[3]{1-x_0} = -\frac{1}{3(1-x_0)^{2/3}}\,(x-x_0).$$

Puesto que, la recta tangente también pasa por el punto $(3,0)$, entonces este punto debe satisfacer la ecuación de la recta tangente, así,

$$0 - \sqrt[3]{1-x_0} = -\frac{1}{3(1-x_0)^{2/3}}\,(3-x_0),$$

observemos que obtenemos una ecuación en la incognita x_0, por lo que al resolverla se tendrá la abscisa del punto del tangencia y por ende su ordenada, así, como también la pendiente de la recta tangente. Resolvemos

$$-\sqrt[3]{1-x_0} = -\frac{1}{3\left(1-x_0\right)^{2/3}}\left(3-x_0\right) \implies -3\left(1-x_0\right)^{2/3}\sqrt[3]{1-x_0} = -\left(3-x_0\right)$$
$$\implies -3\left(1-x_0\right) = -3+x_0 \implies -3+3x_0 = -3+x_0$$
$$\implies 2x_0 = 0 \implies x_0 = 0$$

de aquí,

$$y_0 = \sqrt[3]{1-(0)} = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad \text{y} \qquad m_{\tan} = f'(0) = -\frac{1}{3\left(1-(0)\right)^{2/3}} = -\frac{1}{3},$$

luego, la ecuación de la recta tangente a $y=\sqrt[3]{1-x}$ en el punto de tangencia $(0,1)$ y que pasa por el punto $(3,0)$ viene dada por

$$y-1 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x-0) \implies \boxed{y = -\frac{x}{3}+1.}$$

★

Ejemplo 15.4 : *¿Cuántas rectas tangentes a la curva* $y=\dfrac{x}{x+1}$ *pasan por el punto* $(2,2)$*? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?.*

Solución : En primer lugar, veamos si el punto dado es punto de tangencia, para ellos sustituimos $x=2$ en la función y verificamos que se cumpla la igual, es decir, obtenemos que $y=2$,

$$y(2) = \frac{(2)}{(2)+1} = \frac{2}{3} \neq 2,$$

por lo tanto, $(2,2)$ **no** es punto de tangencia. Sea $P(x_0,y_0)$ el punto de tangencia, hasta los momentos desconocido. Si $P(x_0,y_0)$ es el punto de tangencia, entonces, sus coordenadas son

$$P(x_0,y_0) = P\left(x_0, \frac{x_0}{x_0+1}\right).$$

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia P viene dada por

$$m_{\tan} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

calculamos la pendiente por medio del límite, obtenemos

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x_0+h}{x_0+h+1}-\dfrac{x_0}{x_0+1}}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\dfrac{x_0}{x_0+1}-\dfrac{x_0}{x_0+1}}{0} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind.},$$

levantamos la indeterminación

$$\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x_0+h}{x_0+h+1}-\dfrac{x_0}{x_0+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x_0+h)(x_0+1)-x_0(x_0+h+1)}{(x_0+h+1)(x_0+1)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)(x_0+1)-x_0(x_0+h+1)}{h(x_0+h+1)(x_0+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+x_0+hx_0+h-\left(x_0^2+x_0h+x_0\right)}{h(x_0+h+1)(x_0+1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+x_0+hx_0+h-x_0^2-x_0h-x_0}{h(x_0+h+1)(x_0+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(x_0+h+1)(x_0+1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(x_0+h+1)(x_0+1)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1}{(x_0+(0)+1)(x_0+1)} = \frac{1}{(x_0+1)^2}
\end{aligned}$$

luego, la pendiente de la recta tangente es $m_{\tan} = f'(x_0) = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ y la ecuación de la recta tangente sería

$$y - y_0 = m_{\tan}\ (x - x_0), \qquad \text{es decir,} \qquad y - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (x - x_0).$$

Puesto que, la recta tangente también pasa por el punto $(2,2)$, entonces este punto debe satisfacer la ecuación de la recta tangente, así,

$$2 - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (2 - x_0),$$

observemos que obtenemos una ecuación en la incognita x_0, por lo que al resolverla se tendrá la abscisa del punto del tangencia y por ende su ordenada, así, como también la pendiente de la recta tangente. Resolvemos

$$2 - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (2 - x_0) \quad \Longrightarrow \quad 2(x_0+1)^2 - x_0(x_0+1) = (2 - x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad 2\left(x_0^2 + 2x_0 + 1\right) - x_0^2 - x_0 = 2 - x_0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0^2 + 4x_0 + 2 - x_0^2 - x_0 - 2 + x_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_0^2 + 4x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0(x_0+4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0 \ \text{ y } \ x_0 = -4,$$

de aquí,

- Si $x_0 = 0$, entonces,

$$y_0 = \frac{(0)}{(0)+1} = 0 \qquad \text{y} \qquad m_{\tan} = f'(0) = \frac{1}{((0)+1)^2} = 1,$$

  luego, la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia $(0,0)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ viene dada por

$$y - 0 = (1)(x - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = x.}$$

- Si $x_0 = -4$, entonces,

$$y_0 = \frac{(-4)}{(-4)+1} = \frac{4}{3} \qquad \text{y} \qquad m_{\tan} = f'(-4) = \frac{1}{((-4)+1)^2} = \frac{1}{9},$$

  luego, la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia $\left(-4, \dfrac{4}{3}\right)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ viene dada por

$$y - \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{9}\right)(x - (-4)) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{9y - x - 16 = 0.}$$

★

Ejemplo 15.5 *: Dada la ecuación del movimiento rectilíneo de un móvil* $e(t) = t^3 + \dfrac{3}{t}$. *Calcular la velocidad promedio entre* $t = 4$ *y* $t = 6$ *y la velocidad instantánea cuando* $t = 4$.

Solución : Es conocido que la velocidad promedio de un móvil con función posición $s = s(t)$ entre los instantes $t = t_0$ y $t = t_1$ viene dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0},$$

así, la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ es

$$v_{\text{prom}} = \frac{e(6) - e(4)}{6 - 4} = \frac{e(6) - e(4)}{2},$$

donde,

$$e(6) = (6)^3 + \frac{3}{(6)} = \frac{433}{2} \qquad \text{y} \qquad e(4) = (4)^3 + \frac{3}{(4)} = \frac{259}{4},$$

por lo que,

$$v_{\text{prom}} = \frac{e(6) - e(4)}{2} = \frac{\dfrac{433}{2} - \dfrac{259}{4}}{2} = \frac{\dfrac{607}{4}}{2} = \frac{607}{8}, \qquad \text{es decir,} \qquad v_{\text{prom}} = \frac{607}{8}.$$

Calculemos, ahora, la velocidad instantánea del móvil cuando $t = 4$, es conocido que la velocidad instantánea o simplemente velocidad, en un instante $t = t_0$ viene dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

donde, $s(t)$ representa la función posición del móvil en cualquier instante t, así,

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{e(t) - e(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^3 + \dfrac{3}{t} - \left((4)^3 + \dfrac{3}{(4)}\right)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^3 + \dfrac{3}{t} - \dfrac{259}{4}}{t - 4}$$

$$= \lim_{t \to 4} \frac{\dfrac{4t^4 + 12 - 259t}{4t}}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{4t^4 - 259t + 12}{4t(t-4)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{4(4)^4 - 259(4) + 12}{4(4)((4) - 4)}$$

$$= \frac{1024 - 1036 + 12}{16(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind..}$$

Levantamos la indeterminación, para ello factorizamos el polinomio del numerador, aplicando el método de Reffini, por ser un polinomio de grado 4.

Los divisores del término independiente, $a_0 = 12$, son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12.

Observemos que el polinomio se anula en $t = 4$, por lo tanto, $t = 4$ es una raíz del polinomio

Para $t = 4$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & 0 & 0 & -259 & 12 \\ 4 & & 16 & 64 & 256 & -12 \\ \hline & 4 & 16 & 64 & -3 & 0 \end{array} \quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

por lo tanto, $t = 4$ **si** es raíz del polinomio y se puede escribir como

$$4t^4 - 259t + 12 = (t-4)\left(4t^3 + 16t^2 + 64t - 3\right).$$

Entonces

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{4t^4 - 259t + 12}{4t(t-4)} = \lim_{t \to 4} \frac{(t-4)\left(4t^3 + 16t^2 + 64t - 3\right)}{4t(t-4)} = \lim_{t \to 4} \frac{4t^3 + 16t^2 + 64t - 3}{4t}$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{4(4)^3 + 16(4)^2 + 64(4) - 3}{4(4)} = \frac{256 + 256 + 256 - 3}{16} = \frac{765}{16}.$$

Luego, la velocidad instantánea 3n 3l instante $t = 4$, es

$$v(4) = \frac{765}{16}.$$

★

Ejemplo 15.6 *: Calcular la velocidad de un punto que se mueve de acuerdo con la ley:* $s = 180t - 16t^2$. *¿En qué instante se anula la velocidad?*

Solución : Es conocido que, la velocidad de un móvil, en un instante $t = t_0$, viene dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

así,

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\left(180t - 16t^2\right) - \left(180t_0 - 16t_0^2\right)}{t - t_0},$$

el cual es un límite que presenta una indterminación $\frac{0}{0}$, levantamos la indeterminación

$$\begin{aligned} v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\left(180t - 16t^2\right) - \left(180t_0 - 16t_0^2\right)}{t - t_0} &= \lim_{t \to t_0} \frac{180t - 16t^2 - 180t_0 + 16t_0^2}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{(180t - 180t_0) + \left(-16t^2 + 16t_0^2\right)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{180(t - t_0) - 16\left(t^2 - t_0^2\right)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{180(t - t_0) - 16(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(180 - 16(t + t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} (180 - 16(t + t_0)) \overset{\text{S.I.}}{=} 180 - 16((t_0) + t_0) = 180 - 16(2t_0) = 180 - 32t_0. \end{aligned}$$

Luego, la velocidad, en cualquier instante t_0, viene dada por

$$v(t_0) = 180 - 32t_0.$$

Calculamos el instante en que la velocidad se anula, para ello, igualamos la velocidad a cero y obtenemos

$$180 - 32t_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 180 = 32t_0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \frac{180}{32} = \frac{45}{8},$$

por lo tanto, la velocidad es cero en el instante $t_0 = \frac{45}{8}$ unidad de tiempo correspondiente. ★

Ejemplo 15.7 *: Responda* ***VERDADERO*** *o* ***FALSO*** *la siguiente proposición:*

"Sea f una función diferenciable en el punto $x = x_0$, entonces su derivada en $x = x_0$ viene dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}."$$

Solución : Es conocido que, la derivada de una función f en el punto x_0, viene dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Proponemos el cambio de variable

$$x = x_0 + h \qquad \text{con lo que} \qquad h = x - x_0$$

así,

$$h \to 0 \qquad \text{entonces} \qquad x \to x_0$$

y la derivada de f se transforma en

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Luego, la proposición es **VERDADERA**. ★

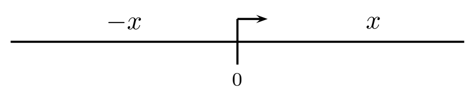
Ejemplo 15.8 *: Demuestre que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.*

Demostración : Por definición de derivada, tenemos

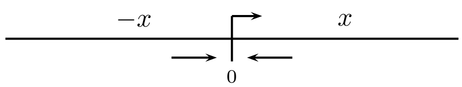
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h},$$

el cual presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Por definición de valor absoluto, se tiene

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



observemos que, por la naturaleza de la función valor absoluto, nos vemos en la necesidad de estudiar los límites laterales



$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1, \end{cases}$$

como,

$$-1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{no existe,}$$

puesto que,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{no existe,}$$

se concluye que $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. ★

Ejemplo 15.9 *: Demuestre que si f es una función diferenciable en $x = x_0$, entonces f es continua en $x = x_0$.*

Demostración : Es conocido que, si f es una función diferenciable en un punto $x = x_0$, entonces $f'(x_0)$ existe, es decir,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe.}$$

Por otra parte, para que una función f sea continua en un punto $x = x_0 \in \text{Dom } f$, se debe cumplir que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

esto es lo que debemos demostrar.

Escribimos a $f(x) - f(x_0)$, de la siguiente manera

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_o) \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

considerando el límite cuando $x \to x_0$, se tiene

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} (x - x_o) \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to x_0} (x - x_o) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (0)\,(f'(x_0)) = 0$$

siempre y cuando los límites existan

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

así,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0,$$

por otra parte

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)\underset{\uparrow}{=}\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0),$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{siempre y cuando los límites existan}\\ \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)\end{array}}$$

por lo tanto,

$$0=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0),$$

es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

luego, f es continua en $x=x_0$. ★

Ejemplo 15.10 : *Responda* ***VERDADERO*** *o* ***FALSO*** *la siguiente proposición:*

"Si f es una función continua en el punto $x=x_0$, entonces f es diferenciable en $x=x_0$".

Solución : Consideremos la función $f(x)=|x|$ y $x_0=0$. Por el ejemplo 15.8 es conocido que la función f **NO** es diferenciable en $x_0=0$.

Estudiemos la continuidad de f en $x_0=0$. Para ello verificamos que se cumple la tres condiciones para la continuidad en u punto

1. ¿$f(0)$ existe? : Tenemos que
$$f(0)=|0|=0 \qquad \text{existe.}$$
2. ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe? : Tenemos que
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}|x|=|0|=0 \qquad \text{existe.}$$
3. ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$? : Tenemos que
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0) \qquad \checkmark$$

como se satisfacen las tres condiciones de continuidad, se concluye que $f(x)=|x|$ es continua en $x_0=0$.

Así, tenemos una función que es continua en un punto $(x_0=0)$ pero **NO** es diferenciable en ese punto, por lo tanto, la proposición es **FALSA**. ★

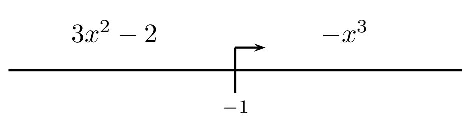
Ejemplo 15.11 : *Considere la función*

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & si \quad x<-1\\ -x^3 & si \quad x\geq -1\end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de la función f en el punto $x_0=-1$.

Solución : Tenemos que

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & \text{si} \quad x<-1\\ -x^3 & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}$$



Para que $f'(-1)$ exista, el siguiente límite

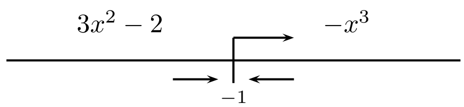
$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

debe existir y además la función f debe ser continua en $x=-1$.

Estudiemos la continuidad de f en $x=-1$. Observemos que f está definida en $x=-1$ y vale

$$f(-1) = -(-1)^3 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(-1) = 1,$$

por otro lado, el límite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ debe existir.



$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \left(3x^2-2\right) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} -x^3 = 1 \end{cases}$$

por lo tanto, como los límites laterales existen y son iguales se concluye que

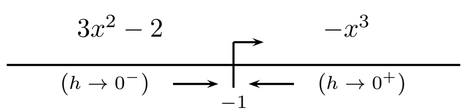
$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1 \qquad \text{existe.}$$

observe que con esta igualdad se cumple la tercera condición para la continuidad. Por lo tanto, f es continua en $x_0=-1$.

Ahora estudiamos la diferenciabilidad de f en $x_0=-1$. Como se dijo anteriormente, para que $f'(-1)$ exista el siguiente límite

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales



$$f(-1+h) = \begin{cases} 3(-1+h)^2 - 2 & \text{si} \quad h<0 \\ \\ -(-1+h)^3 & \text{si} \quad h>0 \end{cases}$$

así,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{3(-1+h)^2 - 2 - 1}{h} \\ \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-(-1+h)^3 - 1}{h} \end{cases}$$

calculamos cada uno de los límites laterales

- Para el límite lateral izquierdo: Observamos que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{3(-1+h)^2 - 2 - 1}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{3(-1+(0))^2 - 2 - 1}{(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado}$$

  levantamos la indeterminación

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{3(-1+h)^2 - 2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3(-1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3\left(h^2 - 2h + 1\right) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2 - 6h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(3h-6)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} (3h-6) \overset{\text{S.I.}}{=} 3(0) - 6 = -6.$$

- Para el límite lateral derecho: Observamos que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-(-1+h)^3 - 1}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-(-1+(0))^3 - 1}{(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado}$$

levantamos la indeterminación

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{-\left(-1+h\right)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\left(h^3-3h^2+3h-1\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^3+3h^2-3h+1-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^3+3h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\left(-h^2+3h-3\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(-h^2+3h-3\right)\overset{\text{S.I.}}{=}-\left(0\right)^2+3\left(0\right)-3=-3.$$

Como

$$-6=\lim_{h\to 0^-}\frac{3\left(-1+h\right)^2-2-1}{h}\neq\lim_{h\to 0^+}\frac{-\left(-1+h\right)^3-1}{h}=-3,$$

concluimos que

$$f'\left(-1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(-1+h\right)-f\left(-1\right)}{h}\quad\leftarrow\quad\text{no existe.}$$

Luego, f **NO** es diferenciable en $x_0=-1$. ★

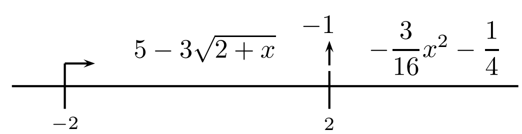
Ejemplo 15.12 *: Considere la función*

$$g\left(x\right)=\begin{cases}5-3\sqrt{2+x} & si\quad -2\leq x<2\\ -1 & si\quad x=2\\ -\dfrac{3}{16}x^2-\dfrac{1}{4} & si\quad x>2\end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de la función g en el punto $x_0=2$.

Solución : Tenemos que

$$g\left(x\right)=\begin{cases}5-3\sqrt{2+x} & \text{si}\quad -2\leq x<2\\ -1 & \text{si}\quad x=2\\ -\dfrac{3}{16}x^2-\dfrac{1}{4} & \text{si}\quad x>2\end{cases}$$



Para que $g'\left(2\right)$ exista, el siguiente límite

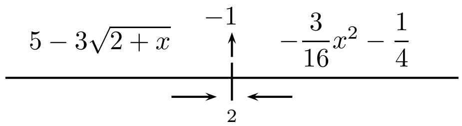
$$g'\left(2\right)=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(2+h\right)-g\left(2\right)}{h}$$

debe existir y además la función g debe ser continua en $x=2$.

Estudiemos la continuidad de g en $x=2$. Observemos que g está definida en $x=2$ y vale

$$g\left(2\right)=-1,$$

por otro lado, el límite $\lim\limits_{x\to 2}g\left(x\right)$ debe existir.



$$\lim_{x\to 2}g\left(x\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(5-3\sqrt{2+x}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\dfrac{3}{16}x^2-\dfrac{1}{4}\right)=-1\end{cases}$$

por lo tanto, como los límites laterales existen y son iguales se concluye que

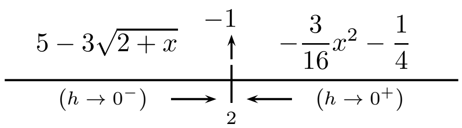
$$\lim_{x\to 2}g\left(x\right)=-1\qquad\text{existe.}$$

observe que con esta igualdad se cumple la tercera condición para la continuidad. Por lo tanto, g es continua en $x_0 = 2$.

Ahora estudiamos la diferenciabilidad de g en $x_0 = 2$. Como se dijo anteriormente, para que $g'(2)$ exista el siguiente límite

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales



$$g(2+h) = \begin{cases} 5 - 3\sqrt{2+(2+h)} & \text{si} \quad h < 0 \\ -\dfrac{3}{16}(2+h)^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad h > 0 \end{cases}$$

así,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{5 - 3\sqrt{2+(2+h)} - (-1)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-\frac{3}{16}(2+h)^2 - \frac{1}{4} - (-1)}{h} \end{cases}$$

calculamos cada uno de los límites laterales

- Para el límite lateral izquierdo: Observamos que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{5 - 3\sqrt{2+(2+h)} - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{6 - 3\sqrt{4+h}}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{6 - 3\sqrt{4+(0)}}{(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado}$$

levantamos la indeterminación, aplicando la conjugada

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{6 - 3\sqrt{4+h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{6 - 3\sqrt{4+h}}{h} \frac{6 + 3\sqrt{4+h}}{6 + 3\sqrt{4+h}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(6 - 3\sqrt{4+h}\right)\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)}{h\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(6)^2 - \left(3\sqrt{4+h}\right)^2}{h\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{36 - 9(4+h)}{h\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{36 - 36 - 9h}{h\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-9h}{h\left(6 + 3\sqrt{4+h}\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-9}{6 + 3\sqrt{4+h}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-9}{6 + 3\sqrt{4+(0)}} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}.$$

- Para el límite lateral derecho: Observamos que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}(2+h)^2 - \frac{1}{4} - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}(2+h)^2 + \frac{3}{4}}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-\frac{3}{16}(2+(0))^2 + \frac{3}{4}}{(0)} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Ind.}$$

levantamos la indeterminación

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}(2+h)^2 + \frac{3}{4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}(2+h)^2 + \frac{3}{4}\frac{4}{4}}{h} == \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}\left((2+h)^2 - 4\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-3\left(4 + 4h + h^2 - 4\right)}{16h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-3\left(4h + h^2\right)}{16h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-3h(4+h)}{16h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-3(4+h)}{16} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-3(4+(0))}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Como

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{5-3\sqrt{2+(2+h)}-(-1)}{h} = -\frac{3}{4} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{3}{16}(2+h)^2-\frac{1}{4}-(-1)}{h},$$

concluimos que

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -\frac{3}{4} \quad \leftarrow \quad \text{existe.}$$

Luego, g es diferenciable en $x_0 = 2$ y $g'(2) = -\dfrac{3}{4}$. ★

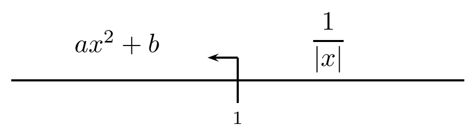
Ejemplo 15.13 *: Dada*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Encontrar los valores de a *y* b *para que* $f'(1)$ *exista.*

Solución : Tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Para que $f'(1)$ exista el siguiente límite

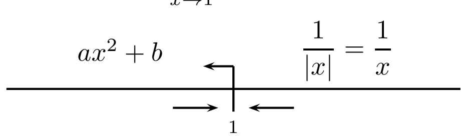
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

debe existir y además la función f debe ser continua en $x = 1$.

Estudiemos la continuidad de f en $x = 1$. Observemos que f está definida en $x = 1$ y vale

$$f(1) = a(1)^2 + b = a + b \qquad \Longrightarrow \qquad f(1) = a + b,$$

por otro lado, el límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ debe existir.



$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2+b\right) = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{|x|} = 1 \end{cases}$$

por lo tanto, para que el límite exista se debe cumplir que

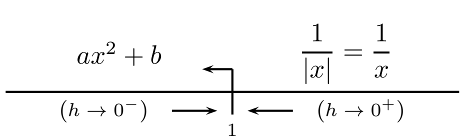
$$a + b = 1,$$

observe que con esta igualdad se cumple la tercera condición para la continuidad.

Estudiemos, ahora, la diferenciabilidad de f en $x = 1$. Como se dijo anteriormente, para que $f'(1)$ exista el siguiente límite

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{a(1+h)^2+b-\left(a(1)^2+b\right)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+h}-\left(a(1)^2+b\right)}{h} \end{cases}$$

como $a+b=1$, se tiene para cada límite lateral

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+h\right)^2+b-\left(a\left(1\right)^2+b\right)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+h\right)^2+b-\left(a+b\right)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+h\right)^2+b-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+2h+h^2\right)+b-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a+2ah+ah^2+b-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{\left(a+b\right)+2ah+ah^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2ah+ah^2-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{2ah+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h\left(2a+ah\right)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\left(2a+ah\right)=2a,
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-\left(a\left(1\right)^2+b\right)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-\left(a+b\right)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1-\left(1+h\right)}{1+h}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1-1-h}{h\left(1+h\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h\left(1+h\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-1}{1+h}=-1,
\end{aligned}$$

para que f sea diferenciable en $x=1$, se debe tener que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f\left(1+h\right)-\left(1\right)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(1+h\right)-\left(1\right)}{h}$$

es decir,

$$2a=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad a=-\frac{1}{2}$$

y puesto que $a+b=1$, se tiene

$$-\frac{1}{2}+b=1 \qquad \Longrightarrow \qquad b=1+\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad b=\frac{3}{2}.$$

Luego para que f sea diferenciable en $x=1$, las constantes son

$$a=-\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad b=\frac{3}{2}$$

y la función f queda

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 1\\[2ex] \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x>1.\end{cases}$$

★

Ejemplo 15.14 *: Sea $f\left(x\right)=k$, donde k es una constante. Hallar f'.*

Solución : Es conocido que

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{k}^{\boxed{\text{Función } f \text{ evaluada en } x+h}}-\overbrace{k}^{\boxed{\text{Función } f}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

es decir,

$$\boxed{f'(x) = [k]' = 0 \qquad \leftarrow \quad \text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.15 *: Sea* $f(x) = x$. *Hallar* f'.

Solución : Es conocido que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(x+h)}^{\boxed{\text{Función } f \text{ evaluada en } x+h}} - \overbrace{x}^{\boxed{\text{Función } f}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

es decir,

$$\boxed{f'(x) = [x]' = 1 \qquad \leftarrow \quad \text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.16 *: Sea* $f(x) = x^2$. *Hallar* f'.

Solución : Es conocido que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2}^{\boxed{\text{Función } f \text{ evaluada en } x+h}} - \overbrace{x^2}^{\boxed{\text{Función } f}}}{h},$$

el cual es un límite con una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, levantamos la indeterminación

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2 - x^2}^{\boxed{\text{Producto suma por diferencia } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)(x + h + x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\ (2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} \ (2x + h) \overset{\text{S.I.}}{=} 2x.$$

Luego,

$$\boxed{f'(x) = \left[x^2\right]' = 2x \qquad \leftarrow \quad \text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.17 *: Sea* $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *Hallar* f'.

Solución : Es conocido que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt[3]{x+h}}^{\boxed{\substack{\text{Función } f\\ \text{evaluada en } x+h}}}-\overbrace{\sqrt[3]{x}}^{\boxed{\text{Función } f}}}{h},$$

el cual es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicamos la conjugada para levantar la indeterminación

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)}{h}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^3}-\sqrt[3]{x^3}}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+(0))^2}+\sqrt[3]{x+(0)}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{f'(x)=\left[\sqrt[3]{x}\right]'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\qquad\leftarrow\quad\text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.18 *: Sea* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$*. Hallar* f'*.*

Solución : Es conocido que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\dfrac{1}{(x+h)^2}}^{\boxed{\substack{\text{Función } f\\ \text{evaluada en } x+h}}}-\overbrace{\dfrac{1}{x^2}}^{\boxed{\text{Función } f}}}{h},$$

el cual es un límite con una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, levantamos la indeterminación

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2\,(x+h)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{x^2-(x+h)^2}^{\substack{\text{Producto suma por diferencia}\\ a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}}{h\;x^2\;(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{(x-(x+h))\,(x+x+h)}{h\;x^2\;(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h\,(2x+h)}{h\;x^2\;(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{x^2\;(x+h)^2}\stackrel{\text{S.I.}}{=}\frac{-(2x+(0))}{x^2\;(x+(0))^2}=\frac{-2x}{x^2\;x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}.$$

Luego,

$$\boxed{f'(x)-\left[\frac{1}{x^2}\right]'=-\frac{2}{x^3}\qquad\leftarrow\ \text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.19 *: Sea* $f(x)=\operatorname{sen}x$. *Hallar* f'.

Solución : Es conocido que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x+h)}^{\substack{\text{Función } f\\ \text{evaluada en } x+h}}-\overbrace{\operatorname{sen}x}^{\text{Función } f}}{h}.$$

Calculamos el límite, el cual presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x+h)}^{\substack{\text{Seno de la suma de ángulos}\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}}-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\operatorname{sen}x\cos h}^{\text{Factor común }\operatorname{sen}x}+\cos x\operatorname{sen}h-\overbrace{\operatorname{sen}x}^{\text{Factor común }\operatorname{sen}x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)\operatorname{sen}x+\cos x\operatorname{sen}h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(\cos h-1)\operatorname{sen}x}{h}+\frac{\cos x\operatorname{sen}h}{h}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{siempre y cuando los límites existan}\\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)}}{\stackrel{?}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)\overbrace{\operatorname{sen}x}^{\substack{\text{Constante respecto a la}\\ \text{variable } h\text{, sale del límite}}}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\cos x}^{\substack{\text{Constante respecto a la}\\ \text{variable } h\text{, sale del límite}}}\operatorname{sen}h}{h}=\operatorname{sen}x\,\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}}^{\substack{\text{Límite notable}\\ \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=1}},$$

Calculamos cada uno de los límites

Para $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}$. Este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, para levantar la indeterminación aplicamos la conjugada trigonométrica

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}\frac{(\cos h+1)}{(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\cos^2 h-1}^{\substack{\text{Identidad trigonométrica}\\ \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}}}{h\,(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h\,(\cos h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\underset{\substack{\text{siempre y cuando los límites existan}\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)}}{\overset{?}{=}}-\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\right)\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)}_{\substack{\text{Límite notable}\\ \lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}=1}},$$

donde,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0,$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=-\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)=-(0)(1)=0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\operatorname{sen} x\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\ \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=\operatorname{sen} x\ (0)\ +\ \cos x\ (1)=\cos x.$$

Luego,

$$\boxed{f'(x)-[\operatorname{sen} x]'=\cos x \qquad \leftarrow \quad \text{existe.}}$$

★

Ejemplo 15.20 *: Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función suma, $f+g$, también es diferenciable y su derivada viene dada por*

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

Demostración : Como f es diferenciable, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe y es la derivada de f, es decir

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Similar argumento para la función g, entonces

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Así,

$$[f+g]'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[f+g](x+h)-[f+g](x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Luego,

$$\boxed{[f+g]'(x) = f'(x)+g'(x).}$$

★

Ejemplo 15.21 *: Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función producto, fg, también es diferenciable y su derivada viene dada por*

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).$$

Demostración : Como f es diferenciable, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe y es la derivada de f, es decir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Similar argumento para la función g, entonces

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Así,

$$[fg]'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[fg](x+h)-[fg](x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x+h)+f(x)\,g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x+h))+(f(x)\,g(x+h)-f(x)\,g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))\,g(x+h)+f(x)\,(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(f(x+h)-f(x))\,g(x+h)}{h}+\frac{f(x)\,(g(x+h)-g(x))}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))\,g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}g(x+h)\right)+f(x)\ \lim_{h\to 0}\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).$$

Luego,

$$\boxed{[fg]'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,.}$$

★

Ejemplo 15.22 : *Demuestre que* $f''(0)$ *no existe para* $f(x) = x\,|x|$.

Demostración : Es conocido que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por lo tanto,

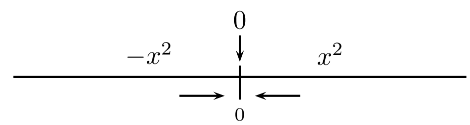
$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

así,

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h},$$

pero no conocemos f', calculemos f', observemos que

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



Estudiemos cada caso

Caso $x > 0$: Tenemos que $f(x) = x^2$, por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x,$$

luego

$$f'(x) = 2x \qquad\qquad \text{si} \quad x > 0$$

Caso $x = 0$: Tenemos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -h = 0 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0 \end{cases},$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad f'(0) = 0.$$

Caso $x < 0$: Tenemos que $f(x) = -x^2$, por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 - \left(-x^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 + x^2}{h}$$

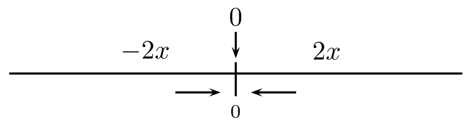
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x-(x+h))(x+x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} -(2x+h) = -2x,$$

luego,

$$f'(x) = -2x \qquad \text{si} \quad x < 0.$$

Entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$



Calculamos $f''(0)$

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -2 = -2 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2, \end{cases},$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h} \qquad \text{no existe}$$

y concluimos que $f''(0)$ **no existe.** ★

Ejercicios

1. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 8/\left(x^2+4\right)$ en el punto $(2,1)$.
2. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x - x^{-1}$ en el punto $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.
3. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - x^2$ donde la tangente sea horizontal.
4. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ que pasa por el punto $(1,0)$.
5. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ que pasa por el punto $(1,1)$.
6. Encuentre los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ en los que la tangente sea horizontal.
7. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x$ donde la recta tangente tenga pendiente 1.
8. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado

   1. $y = \dfrac{x}{x-3}$, $(6,2)$ 2. $y = x + \dfrac{4}{x}$, $(2,4)$ 3. $y = x^{5/2}$, $(4,32)$ 4. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 1$.
10. Determine en qué punto de la curva $y = x\sqrt{x}$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$.
11. Determine para qué valores de x la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tiene tangente horizontal.
12. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x+1)$ pasan por el punto $(1,2)$? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?
13. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2,-3)$ y que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

14. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene tangentes con pendiente 4.

15. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado. La **recta normal** a una curva C en un punto P es, por defininción, la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a C en P.

    1. $y = 1 - x^2$, $(2, -3)$
    2. $y = \dfrac{1}{x-1}$, $(2, 1)$
    3. $y = \sqrt[3]{x}$, $(-8, -2)$
    4. $y = f(x)$, $(a, f(a))$

16. ¿En qué punto de la curva $y = x^4$ la recta normal tiene pendiente 16?

17. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$ en el punto $P(2, -5)$.

18. Hallar todos los puntos sobre la curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 8$ tales que la recta tangente a la curva en dichos puntos sea paralela a la recta $16x - y + 5 = 0$.

19. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -4)$ y que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

20. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ pasan por el punto $(2, 2)$? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?.

21. La ecuación de la trayectoria de un cuerpo en movimiento es $s = (2t+3)^2$. Calcular

    (a) La velocidad media en el recorrido entre $t = 3$ y $t = 7$.
    (b) La velocidad instantánea para $t = 5$.
    (c) La velocidad instantánea para $t = 7$.

22. La ecuación $s = (2t+3)^2$ representa la posición de un móvil en el instante t. Determinar la expresión de la velocidad y la aceleración.

23. Encontrar el punto de la curva $f(x) = (x-2)^2$ en que la recta tangente es perpendicular a $4x - 2y + 2 = 0$.

24. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por $e = 500t - 20t^2$, siendo la dirección positiva hacia arriba. Encontrar

    (a) La velocidad del cohete 5 segundos después de haber sido encendido?
    (b) ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar su altura máxima?

25. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 1$.

26. Determine para qué valores de x la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tiene tangente horizontal.

27. Encontrar una ecuación para cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$, que sean paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$.

28. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\{(x-2)x + 3\} - 1$ en el punto $P(2, 5)$.

29. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x) = x^2 + 4x$ que pasan por el punto $P(-1, -4)$.

30. Calcular la velocidad de un punto que se mueve de acuerdo con la ley: $s = 180t - 16t^2$. ¿En qué instante se anula la velocidad?

31. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ en los puntos para los cuales $|2x - 1| = 9$.

32. Determinar los puntos de la función $2x^2 + y - x - 5 = 0$ para los cuales la tangente pasa por el punto $Q(-1, 10)$.

33. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo de un móvil: $e = t^3 + \dfrac{3}{t}$. Calcular la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ y la velocidad instantánea cuando $t = 4$.

34. Si una piedra es arrojada verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 32 p/seg, la ecuación de movimiento es $s = -16t^2 + 32t$, donde t seg. es el tiempo que ha transcurrido desde que la piedra fue lanzada, s pies es la distancia de la piedra desde el punto de partida en t seg. y la dirección positiva es hacia arriba. Encontrar

    (a) La velocidad promedio de la piedra durante el intervalo de tiempo $\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{5}{4}$.

    (b) La velocidad instantánea de la piedra en $\frac{3}{4}$ seg. y en $\frac{5}{4}$ seg.

    (c) La rapidez de la piedra en $\frac{3}{4}$ seg. y en $\frac{5}{4}$ seg.

    (d) La velocidad promedio de la piedra durante el intervalo de tiempo $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$.

    (e) ¿Cuántos segundos tomaría a la piedra alcanzar el punto más alto?

    (f) ¿A qué altura máxima iría la piedra?

    (g) ¿Cuántos segundos tomaría a la piedra llegar al suelo?

    (h) La velocidad instantánea de la piedra cuando llega al suelo. Mostrar el comportamiento del movimiento con una figura.

35. Si una bola se empuja de tal forma que tiene una velocidad inicial de 24 p/seg. hacia abajo de un plano inclinado, entonces $s = 24t + 10t^2$, donde s pies es la distancia de la bola desde su punto de partida en t seg. y la dirección positiva hacia abajo del plano inclinado

    (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la bola de t_1 seg.?

    (b) ¿Cuánto tiempo tarda la velocidad en incrementarse a 48 p/seg.?

36. Una partícula se mueve a lo largo de una linea recta de acuerdo a la ecuación de movimiento

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1.$$

Determinar los intervalos de tiempo cuando se mueva la partícula a la derecha y cuando lo haga a la izquierda. También determinar el instante cuando la partícula cambia su dirección.

37. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 64p/seg. Si la dirección positiva de la distancia desde el punto de partida es hacia arriba, la ecuación del movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t.$$

Si t es la cantidad de segundos en el tiempo que ha transcurrido desde que la pelota fue lanzada y s es la cantidad de pies en la distancia de la pelota desde el punto de partida en t seg encontrar

    (a) La velocidad instántanea de la pelota al término de 1 seg.

    (b) La velocidad instántanea de la pelota al término de 3 seg.

    (c) ¿Cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar su punto más alto?

    (d) ¿A qué altura máxima irá la pelota?

    (e) La rapidez de la pelota al término de 1 y 3 seg.

    (f) ¿Cuántos segundo tarda la pelota en llegar al suelo?

    (g) La velocidad instantánea de la pelota, cuando alcanza el suelo. ¿Al término de 1 seg se encuentra la pelota subiendo o cayendo? ¿Al término de 3 seg la pelota está subiendo o cayendo?

38. Si un objeto cae desde el reposo su ecuación de movimiento es $s = -16t^2$, donde t es el cantidad de segundos en el tiempo que ha transcurrido desde que el objeto abandonó su punto de partida, s es el cantidad de pies en la distancia del objeto desde su punto de partida en t seg y la dirección positiva hacia arriba. Si se lanza una piedra desde un edificio de 256 pies de altura, encontrar

(a) La velocidad instántanea de la piedra, 1 seg después de ser lanzada.

(b) La velocidad instántanea de la piedra, 2 seg después de ser lanzada.

(c) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

(d) La velocidad instántanea de la piedra cuando llega al suelo.

39. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a s pies sobre el suelo t seg después de ser encendido, donde $s = 560t - 16t^2$ y la dirección positiva es hacia arriba. Encontrar

(a) La velocidad del cohete 2 seg después de haber sido encendido.

(b) ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar su altura máxima?

40. Cada uno de los siguientes límites dados representa la derivada de alguna función f en cierto número a. Determine f y a en cada caso.

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ 2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x-1}$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi} \frac{\cos x+1}{x-3\pi}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 6. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-1}{t}$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

41. Demuestre que el límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
no existe cuando $x = 0$ y la función es $f(x) = |x|$.

42. Calcule
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
para $f(x) = x\,|x|$.

43. Demuestre que si f es diferenciable en un punto $x = x_0$, entonces f es continua en el punto $x = x_0$.

44. Responda **VERDADERO** o **FALSO** la siguiente proposición

"Si f es continua en un punto $x = x_0$, entonces f es diferenciable en $x = x_0$."

45. Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función suma, $f+g$, también es diferenciable y su derivada viene dada por
$$[f+g]'(x) = f'(x) + g'(x).$$

46. Sean f una función diferenciable y k una constante cualquiera. Demuestre que la función kf, también es diferenciable y su derivada viene dada por
$$[kf]'(x) = kf'(x).$$

47. Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función producto, fg, también es diferenciable y su derivada viene dada por
$$[fg]'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

48. Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función cociente, $\frac{f}{g}$, también es diferenciable y su derivada viene dada por
$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}.$$

49. Sean f y g funciones diferenciables. Demuestre que la función composición, $f \circ g$, también es diferenciable y su derivada viene dada por
$$[f \circ g]'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

50. Demuestre que la función continua dada no es diferenciable en el valor de x indicado

1. $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2, \\ 2x-4 & x > 2 \end{cases} \quad x = 2$
2. $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0, \\ -4x & x \geq 0 \end{cases} \quad x = 0$

51. Demuestre que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.

52. Demuestre que la función $f(x) = |x-6|$ no es diferenciable en $x = 6$. Encuentre la fórmula de f'.

53. Considere la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
Estudie la diferenciabilidad de la función f en el punto $x_0 = 0$.

54. Considere la función
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^3 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$
Estudie la diferenciabilidad de la función f en el punto $x_0 = -1$.

55. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt[3]{2x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
Estudie la diferenciabilidad de la función g en el punto $x_0 = 1$.

56. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} 5 - 3\sqrt{2+x} & \text{si} \quad -2 \leq x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x = 2 \\ -\dfrac{3}{16}x^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$
Estudie la diferenciabilidad de la función g en el punto $x_0 = 2$.

57. Considere la función
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si} \quad x > 4 \\ 3 & \text{si} \quad x = 4 \\ \dfrac{1}{8}x^2 + x - 3 & \text{si} \quad x < 4 \end{cases}$$
Estudie la diferenciabilidad de la función g en el punto $x_0 = 4$.

58. Determine en dónde (y por qué) la siguiente función es discontinua. ¿En qué puntos no es diferenciable?
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x} & \text{si} \quad x < 1 \quad (x \neq 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

59. Dada
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$$
Encontrar los valores de a y b para que $f'(1)$ exista.

60. Dada
$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si} \quad x\leq 3 \\ ax+b, & \text{si} \quad 3<x<5. \end{cases}$$
Encontrar los valores de a y b para que $f'(3)$ exista.

61. Dada
$$f(x)=\begin{cases} nx^3+2, & \text{si} \quad x\geq 2 \\ mx^2, & \text{si} \quad x<2. \end{cases}$$
Encontrar los valores de m y n para que $f'(2)$ exista.

62. Considere la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. ¿Existe $f'(0)$?

63. Demuestre que $f''(0)$ no existe para $f(x)=x|x|$.

64. Considere la función $f(x)=x^2|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

65. Sean $f(x)=3x+|x|$ y $g(x)=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{|x|}{4}$. Demostrar que f y g no son diferenciables en $x=0$, pero $f\circ g$ si lo es.

66. Sea $f(x)=(|x|-x)\sqrt[3]{9x}$, encontrar $f'(-3)$, si es que existe.

67. Sea $f(x)=(|x+1|-|x|)^2$, encontrar $f'(x)$, si es que existe.

Respuestas: Ejercicios

1. $y=2-\frac{x}{2}$; 2. $y=6x-4$; 3. $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{27}\right)$; 4. $4y-x+1=0$; 5. $y=1$; 6. $\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right)$ y $(1,0)$; 7. $(0,0)$ y $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$; 8.1. $y=4-\frac{1}{3}x$; 8.2. $y=4$; 8.3. $y=20x-48$; 8.4. $x-2y+2=0$; 9. $2y-x+1=0$, $2y-x-7=0$; 10. $(4,8)$; 11. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 12. 2 rectas, $\left(-\sqrt{3}-2,\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}\right)$, $\left(\sqrt{3}-2,\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}\right)$; 13. $y+x+1=0$, y $11x-y+25=0$; 15.1. $4y-x+14=0$; 15.2. $y-x+1=0$; 15.3. $12x+y+98=0$; 15.4. $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$; 16. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{256}\right)$; 17. $3y-x+17=0$; 18. $(0,8)$, $(1,20)$, $(-1,-12)$; 19. $y=13x-30$, $y=-x-2$; 20. 2 rectas, $(0,0)$, $\left(-4,\frac{4}{3}\right)$ 21.a. 52; 21.b. 52; 21.c. 68; 22.a. $v=4(2t+3)$; 22.b. $a=4|2t+3|$; 23. $\left(\frac{7}{4},\frac{1}{16}\right)$; 24.$a$. 300; 24.$b$. $t=12.5$; 25. $2y-x+1=0$, $2y-x-7=0$; 26. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 27. $y=2x+\frac{4}{3}$, $y=2x$; 28. $y=7x-9$; 29. $y=4x$, $y+4=0$; 30. $v=180-32t$, $t=5.625$; 31. $4y+10x-51=0$, $7y+4\sqrt{7}x+15\sqrt{7}=0$; 32. $(1,4)$, $(-3,-14)$; 33. $v_m=\frac{607}{8}$ y $v=\frac{765}{16}$; 34.a. 0; 34.b. 8 y -8 p/seg; 34.c. 8; 34.d. 0; 34.e. 1 seg; 34.f. 16 pies; 34.g. 2 seg; 34.h. -32 p/seg; 35.a. $20t_1+24$ p/seg; 35.b. $\frac{6}{5}$ seg; 36. Derecha si $t<\frac{1}{3}$ y $t>1$; Izquierda si $\frac{1}{3}<t<1$; Cambia si $t=\frac{1}{3}$ y $t=1$; 37.a. 32 p/seg; 37.b. -32 p/seg; 37.c. 2 seg; 37.d. 64 pies; 37.e. 32; 37.f. 4 seg; 37.g. -64 p/seg; 38.a. -32 p/seg; 38.b. -64 p/seg; 38.c. 4 seg; 38.d. -128 p/seg; 39.a. 496 p/seg; 39.b. 35 seg; 40.1. $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$; 40.2. $f(x)=x^3$, $a=2$; 40.3. $f(x)=x^9$, $a=1$; 40.4. $f(x)=\cos x$, $a=3\pi$; 40.5. $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $a=0$; 40.6. $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=\frac{\pi}{2}$; 40.7. $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=0$; 40.8. $f(x)=\tan x$, $a=0$; 42. 0; 44. Falso; 45. $f'(x)=\begin{cases} 1, & x>6 \\ -1, & x<6 \end{cases}$; 53. No diferenciable en $x_0=0$;

54. No diferenciable en $x_0 = -1$; 55. No diferenciable en $x_0 = 1$; 56. Diferenciable en $x_0 = 2$, $g'(2) = -\frac{3}{4}$;
57. Diferenciable en $x_0 = 4$, $g'(4) = 2$; 58. Discontinua en $x = -1$. No diferenciable en $x = -1$ y $x = 0$;
59. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$; 60. $a = 0$, $b = 1$; 61. $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$; 62. No; 64. No; 66. 8;
67. No diferenciable;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 16

Reglas de derivación.

Objetivos a cubrir — Código : MAT-1.16

- Derivada: Reglas de derivación.
- Derivada de primer y segundo orden. Signo de la primera y segunda derivada.
- Recta tangente y velocidad instántanea.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 16.1 *: Derive la función* $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$.

Solución : Tenemos

$$f'(x) = \underbrace{\left[5\sqrt[5]{x}\right]'}_{\substack{\text{Derivada de una constante por una función} \\ [kf]'(x) = kf'(x)}} = 5\left[\sqrt{x}\right]',$$

donde,

$$\left[\sqrt[5]{x}\right]' = \underbrace{\left[x^{1/5}\right]'}_{\substack{\text{Derivada de una potencia} \\ [x^n]' = nx^{n-1}}} = \frac{1}{5}\, x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

Así,

$$f'(x) = \left[5\sqrt[5]{x}\right]' = 5\,\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

★

Ejemplo 16.2 *: Derive la siguiente función* $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Solución : Tenemos

$$f'(x) = \underbrace{\left[\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right]'}_{\substack{\text{Derivada de la suma de funciones} \\ [f+g]'(x) = f'(x) + g'(x)}} = \left[\sqrt{x}\right]' + \left[\frac{3}{\sqrt{x}}\right]',$$

donde,

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \underbrace{\left[x^{1/2}\right]'}_{\substack{\text{Derivada de una potencia} \\ [x^n]' = nx^{n-1}}} = \frac{1}{2}\, x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

mientras que,

$$\left[\frac{3}{\sqrt{x}}\right]' = \underbrace{\left[3x^{-1/2}\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Derivada de una constante} \\ \text{por una función} \\ [kf]'(x) = kf'(x)}}}} = 3\underbrace{\left[x^{-1/2}\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Derivada de una potencia} \\ [x^n]' = nx^{n-1}}}}} = 3\left(-\frac{1}{2}\ x^{-1/2-1}\right) = -\frac{3}{2}x^{-3/2} = -\frac{3}{2x^{3/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}},$$

así,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3}{2x^{3/2}}.$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x^{3/2}}.$$

★

Ejemplo 16.3 *: Derive la siguiente función* $f(x) = x \operatorname{sen} x.$

Solución : Tenemos

$$f'(x) = \underbrace{[x \operatorname{sen} x]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Derivada del producto de funciones} \\ [fg]'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}}}} = [x]' \operatorname{sen} x + x\,[\operatorname{sen} x]',$$

donde,

$[x]' = 1,$ ver Ejemplo 15.15. $\qquad [\operatorname{sen} x]' = \cos x,$ ver Ejemplo 15.19.

Por lo tanto,

$$f'(x) = [x \operatorname{sen} x]' = (1) \operatorname{sen} x + x(\cos x) = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

Luego,

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

★

Ejemplo 16.4 *: Derive la función* $h(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}.$

Solución : Tenemos

$$h'(x) = \underbrace{\left[\frac{\cos x}{x^2}\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Derivada del cociente de funciones} \\ \left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}}}} = \frac{[\cos x]'\ x^2 - \cos x\ \left[x^2\right]'}{\left(x^2\right)^2},$$

donde,

$$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x, \qquad \left[x^2\right]' = 2x.$$

así,

$$h'(x) = \left[\frac{\cos x}{x^2}\right]' = \frac{[\cos x]'\ x^2 - \cos x\ \left[x^2\right]'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{(-\operatorname{sen} x)\ x^2 - \cos x\ (2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x}{x^4} = \frac{-x\,(x \operatorname{sen} x + 2\cos x)}{x^4} = -\frac{x \operatorname{sen} x + 2\cos x}{x^3}.$$

Luego

$$h'(x) = -\frac{x \operatorname{sen} x + 2\cos x}{x^3}.$$

★

Ejemplo 16.5 *: Derive la siguiente función* $f(x) = \cot x$.

Solución : Es conocido que

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

por lo tanto, para hallar la derivada de f aplicamos la regla de la derivada de un cociente, así,

$$f'(x) = [\cot x]' = \underbrace{\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]'}_{\uparrow} = \frac{[\cos x]' \operatorname{sen} x - \cos x \; [\operatorname{sen} x]'}{(\operatorname{sen} x)^2},$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada del cociente de funciones}\\ \left[\dfrac{h}{g}\right]'(x) = \dfrac{h'(x)\,g(x) - h(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\end{array}}$$

puesto que,

$$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad [\operatorname{sen} x]' = \cos x,$$

tenemos que,

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \; \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x.$$

Luego,

$$[\cot x]' = -\csc^2 x.$$

★

Ejemplo 16.6 *: Derive la función* $f(x) = \cot x - \sqrt[7]{3} + \dfrac{1}{x^\pi}$.

Solución : Tenemos

$$f'(x) = \underbrace{\left[\cot x - \sqrt[7]{3} + \frac{1}{x^\pi}\right]'}_{\uparrow} = [\cot x]' - \left[\sqrt[7]{3}\right]' + \left[\frac{1}{x^\pi}\right]',$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada de la suma de funciones}\\ [f+g+h]'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x)\end{array}}$$

donde

- $[\cot x]' = -\csc^2 x$, ver Ejemplo 16.5.
- $\left[\sqrt[7]{3}\right]' = 0$, ya que, $\sqrt[7]{3}$ es una constante.
- $\left[\dfrac{1}{x^\pi}\right]' = \left[x^{-\pi}\right]' = -\pi x^{-\pi-1} = -\dfrac{\pi}{x^{\pi+1}}$, derivada de una potencia.

así,

$$f'(x) = \left[\cot x - \sqrt[7]{3} + \frac{1}{x^\pi}\right]' = [\cot x]' - \left[\sqrt[7]{3}\right]' + \left[\frac{1}{x^\pi}\right]' = -\csc^2 x - 0 - \frac{\pi}{x^{\pi+1}}.$$

Luego,

$$f'(x) = -\csc^2 x - \frac{\pi}{x^{\pi+1}}.$$

★

Ejemplo 16.7 *: Derive la función* $g(x) = x^3 \operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$.

Solución : Observemos que la función g es la suma (resta) de dos funciones, así, para hallar su derivada aplicamos la regla de la derivada de la suma de funciones

$$g'(x) = \underbrace{\left[x^3 \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right]'}_{\uparrow} = \left[x^3 \operatorname{sen} x\right]' - \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right]',$$

Derivada de la suma de funciones
$[f+g]'(x) = f'(x) + g'(x)$

donde,

$$\underbrace{\left[x^3 \operatorname{sen} x\right]'}_{\uparrow} = \left[x^3\right]' \operatorname{sen} x + x^3 \ [\operatorname{sen} x]',$$

Derivada del producto de funciones
$[fg]'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

de aquí,

$$\left[x^3\right]' = 3x^{3-1} = 3x^2 \qquad \text{y} \qquad [\operatorname{sen} x]' = \cos x,$$

así,

$$\left[x^3 \operatorname{sen} x\right]' = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x.$$

Por otra parte,

$$\underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right]'}_{\uparrow} = \frac{[\operatorname{sen} x]' \ x^3 - \operatorname{sen} x \ \left[x^3\right]'}{\left(x^3\right)^2},$$

Derivada del cociente de funciones
$\left[\dfrac{f}{g}\right]'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$

como,

$$\left[x^3\right]' = 3x^{3-1} = 3x^2 \qquad \text{y} \qquad [\operatorname{sen} x]' = \cos x,$$

se tiene,

$$\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right]' = \frac{[\operatorname{sen} x]' \ x^3 - \operatorname{sen} x \ \left[x^3\right]'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{x^3 \cos x - 3x^2 \operatorname{sen} x}{x^6} = \frac{x^2 \left(x \cos x - 3 \operatorname{sen} x\right)}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \operatorname{sen} x}{x^4}.$$

Entonces

$$g'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x - \frac{x \cos x - 3 \operatorname{sen} x}{x^4}.$$

★

Ejemplo 16.8 *: Derive la siguiente función* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} \operatorname{sen} x}{x^3 + 4}$.

Solución : Observemos que la función f es el cociente de dos funciones, así, para hallar su derivada aplicamos la regla de la derivada del cociente de funciones

$$f'(x) = \underbrace{\left[\frac{\sqrt{x} \operatorname{sen} x}{x^3 + 4}\right]'}_{\uparrow} = \frac{\left[\sqrt{x} \operatorname{sen} x\right]' \left(x^3 + 4\right) - \sqrt{x} \operatorname{sen} x \ \left[x^3 + 4\right]'}{\left(x^3 + 4\right)^2},$$

Derivada del cociente de funciones
$\left[\dfrac{f}{g}\right]'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$

donde,

$$\underbrace{\left[\sqrt{x}\operatorname{sen} x\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada del producto de funciones}\\ [fg]'(x)=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)\end{array}}}} = [\sqrt{x}]' \operatorname{sen} x + \sqrt{x}\ \ [\operatorname{sen} x]',$$

de aquí,

$$[\sqrt{x}]' = \underbrace{\left[x^{1/2}\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada de una potencia}\\ [x^n]'=nx^{n-1}\end{array}}}} = \frac{1}{2}\ x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

y $[\operatorname{sen} x]' = \cos x$, así,

$$\left[\sqrt{x}\operatorname{sen} x\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \operatorname{sen} x + \sqrt{x}\ \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ \cos x = \frac{\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}}.$$

Por otra parte,

$$\underbrace{\left[x^3+4\right]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada de la suma de funciones}\\ [f+g]'(x)=f'(x)+g'(x)\end{array}}}} = \left[x^3\right]' + [4]' = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

Luego,

$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}{x^3+4}\right]' = \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3+4\right) - \left(\sqrt{x}\operatorname{sen} x\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+4\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(\operatorname{sen} x + 2x\cos x)\left(x^3+4\right) - 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\operatorname{sen} x\right)\left(3x^2\right)}{2\sqrt{x}}}{\left(x^3+4\right)^2} = \frac{(\operatorname{sen} x + 2x\cos x)\left(x^3+4\right) - 6x^3\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}\left(x^3+4\right)^2}.$$

Finalmente,

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + 2x\cos x)\left(x^3+4\right) - 6x^3\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}\left(x^3+4\right)^2}.$$

★

Ejemplo 16.9 *: Derive la siguiente función* $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$,

1. *sin utilizar la regla de la cadena.*
2. *utilizando la regla de la cadena.*

Solución : 1. Es conocido que

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x,$$

así,

$$f'(x) = [\operatorname{sen}(2x)]' = \underbrace{[(2\operatorname{sen} x)\cos x]'}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Derivada del producto de funciones}\\ [fg]'(x)=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)\end{array}}}} = [2\operatorname{sen} x]'\cos x + 2\operatorname{sen} x\,[\cos x]',$$

donde
$$[2 \operatorname{sen} x]' = 2 [\operatorname{sen} x]' = 2 \cos x \qquad \text{y} \qquad [\cos x]' = -\operatorname{sen} x,$$
entonces
$$\begin{aligned} f'(x) &= [2 \operatorname{sen} x]' \cos x + 2 \operatorname{sen} x [\cos x]' = 2 \cos x \cos x + 2 \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) \\ &= 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = 2\cos(2x). \end{aligned}$$

Luego,
$$f'(x) = 2\cos(2x).$$

2. Utilizando la regla de la cadena, observemos que la función f es la composición de las funciones $f_1(x) = 2x$ y $f_2(x) = \operatorname{sen} x$, así, $f(x) = f_2(f_1(x))$.
$$\begin{array}{ccccc} (\cdot) & \longrightarrow & 2(\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) \\ (x) & \longrightarrow & 2(x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(2x) \end{array}$$
para derivar comenzamos con la última función que aplicamos, en este caso, la función $\operatorname{sen}(\cdot)$ y continuamos con $2(\cdot)$
$$\begin{array}{cccccc} \text{Función :} & (\cdot) & \longrightarrow & 2(\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) \\ \text{Derivada :} & 1 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & \cos(\cdot), \end{array}$$
entonces,
$$\begin{array}{ccccc} (x) & \longrightarrow & 2(x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(2x) \\ & {\scriptsize\begin{array}{c}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=x\end{array}} & \big\downarrow & {\scriptsize\begin{array}{c}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=2x\end{array}} & \big\downarrow \\ 1 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & \cos(2x) \end{array}$$
por lo tanto,
$$f'(x) = (\cos(2x))\ (2)\ (1),$$
es decir,
$$f'(x) = 2\cos(2x).$$

★

Ejemplo 16.10 *: Derive la siguiente función* $g(x) = \sqrt{\tan x}$.

Solución : Aplicando regla de la cadena, ya que, la función a derivar es una composición de funciones, observe que el orden en que aparecen las funciones en dicha composición es:
$$\begin{array}{ccccc} (\cdot) & \longrightarrow & \tan(\cdot) & \longrightarrow & \sqrt{(\cdot)} \\ (x) & \longrightarrow & \tan(x) & \longrightarrow & \sqrt{\tan x} \end{array}$$
para derivar comenzamos con la última función que aplicamos, en este caso, la función $\sqrt{(\cdot)}$ y continuamos con $\tan(\cdot)$
$$\begin{array}{cccccc} \text{Función :} & (\cdot) & \longrightarrow & \tan(\cdot) & \longrightarrow & \sqrt{(\cdot)} \\ \text{Derivada :} & 1 & \longleftarrow & \sec^2(\cdot) & \longleftarrow & \dfrac{1}{2\sqrt{(\cdot)}}, \end{array}$$
entonces,
$$\begin{array}{ccccc} (x) & \longrightarrow & \tan(x) & \longrightarrow & \sqrt{\tan(x)} \\ & {\scriptsize\begin{array}{c}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=x\end{array}} & \big\downarrow & {\scriptsize\begin{array}{c}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=\tan(x)\end{array}} & \big\downarrow \\ 1 & \longleftarrow & \sec^2(x) & \longleftarrow & \dfrac{1}{2\sqrt{(\tan(x))}} \end{array}$$

por lo tanto,

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{(\tan(x))}}\right)\left(\sec^2(x)\right)(1),$$

es decir,

$$g'(x) = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.$$

Derivando directamente, por la regla de la cadena

$$g'(x) = \left[\sqrt{\tan x}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\ [\tan x]' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\ \sec^2 x.$$

Luego

$$g'(x) = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.$$

★

Ejemplo 16.11 *: Derive la siguiente función* $h(x) = \cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$.

Solución : Aplicando regla de la cadena, ya que, la función a derivar es una composición de funciones, observe que el orden en que aparecen las funciones en dicha composición es:

$$\begin{array}{ccccccccc} (\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^2 & \longrightarrow & \cos(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^4 \\ (x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(x) & \longrightarrow & (\operatorname{sen}(x))^2 & \longrightarrow & \cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) & \longrightarrow & \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^4 \end{array}$$

para derivar comenzamos con la última función que aplicamos, en este caso, la función $(\cdot)^4$, continuamos con $\cos(\cdot)$ y así, sucesivamente.

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{Función :} & (\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^2 & \longrightarrow & \cos(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^4 \\ \text{Derivada :} & 1 & \longleftarrow & \cos(\cdot) & \longleftarrow & 2(\cdot) & \longleftarrow & -\operatorname{sen}(\cdot) & \longleftarrow & 4(\cdot)^3, \end{array}$$

entonces,

$$\begin{array}{ccccccccc} (x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(x) & \longrightarrow & (\operatorname{sen}(x))^2 & \longrightarrow & \cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) & \longrightarrow & \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^4 \\ & \begin{smallmatrix}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=x\end{smallmatrix}\Big\downarrow & & \begin{smallmatrix}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=\operatorname{sen}(x)\end{smallmatrix}\Big\downarrow & & \begin{smallmatrix}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=\operatorname{sen}^2(x)\end{smallmatrix}\Big\downarrow & & \begin{smallmatrix}\text{Derivada}\\ \text{evaluada en}\\ y=\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\end{smallmatrix}\Big\downarrow & \\ 1 & \longleftarrow & \cos(x) & \longleftarrow & 2(\operatorname{sen}(x)) & \longleftarrow & -\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) & \longleftarrow & 4\left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^3 \end{array}$$

por lo tanto,

$$h'(x) = \left(4\left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^3\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)(2(\operatorname{sen}(x)))(\cos(x))(1),$$

es decir,

$$h'(x) = -8\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right).$$

Derivando directamente, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} h'(x) = \left(\cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)' &= 4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)' \\ &= 4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)\ \left(\operatorname{sen}^2 x\right)' \\ &= -4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ (2\operatorname{sen} x)\ (\operatorname{sen} x)' \\ &= -8\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen} x\ \cos x. \end{aligned}$$

Luego

$$h'(x) = -8\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right).$$

★

Ejemplo 16.12 *: Derive la siguiente función* $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Solución : Observemos que esta función es una función compuesta, así, para obtener su derivada aplicamos la regla de la cadena, comenzamos derivando la última función que aplicamos, en este caso $\sqrt[3]{(\cdot)}$, donde

$$\left(\sqrt[3]{(\cdot)}\right)' = \left((\cdot)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(\cdot)^{1/3-1} = \frac{1}{3}(\cdot)^{-2/3} = \frac{1}{3(\cdot)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\cdot)^2}}$$

entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left((x)' + \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left((x)' + (\sqrt{x})'\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) \end{aligned}$$

Luego

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).$$

★

Ejemplo 16.13 *: Estudie el signo de la primera y segunda derivada de la siguiente función*

$$g(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

Solución : Calculamos la primera derivada

$$g'(x) = \left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right)' = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x) = \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}},$$

estudiamos el signo de la derivada, es decir, resolvemos una de las siguientes desigualdades

$$\frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} < 0,$$

Resolvemos la primera, $\frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} > 0$. Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \qquad \text{y} \qquad x^{2/3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$4/3$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x^{2/3}$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$-$	$+$

Luego, la primera derivada es positiva si

$$x \in (1,\infty)$$

y es negativa si

$$x \in (-\infty,0)\bigcup(0,1)\,.$$

Calculamos, ahora, la segunda derivada

$$g''(x) = \left(\frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}\right)' = \frac{4}{9}x^{-2/3} + \frac{8}{9}x^{-5/3} = \frac{4}{9x^{2/3}} + \frac{8}{9x^{5/3}} = \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} \quad \Longrightarrow \quad g''(x) = \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}},$$

estudiamos el signo de la derivada, es decir, resolvemos una de las siguientes desigualdades

$$\frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} > 0 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} < 0,$$

Resolvemos la primera, $\dfrac{4}{9}\dfrac{x+2}{x^{5/3}} > 0$. Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$x+2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-2, \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x^{5/3}=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0$$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$4/9$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x^{5/3}$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la segunda derivada es positiva si

$$x \in (-\infty,-2)\bigcup(0,\infty)$$

y es negativa si

$$x \in (-2,0)$$

★

Ejemplo 16.14 : *Sean* $f(1)=3$; $f'(1)=2$; $f'(9)=1$ *y* $g(x)=f\left(f^2\left(x^2\right)\right)$, *calcular* $g'(1)$.

Solución : Calculemos $g'(x)$, usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g'(x) = \left(\ f\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ \right)' &= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ \left(f^2\left(x^2\right)\right)' \\ &= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ \left(f\left(x^2\right)\right)' \\ &= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ f'\left(x^2\right)\ \left(x^2\right)' \\ &= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ f'\left(x^2\right)\ 2x \\ &= 4xf\left(x^2\right)f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)f'\left(x^2\right), \end{aligned}$$

es decir,

$$g'(x) = 4xf\left(x^2\right) f'\left(f^2\left(x^2\right)\right) f'\left(x^2\right)$$

así,

$$g'(1) = 4(1) f\left((1)^2\right) f'\left(f^2\left((1)^2\right)\right) f'\left((1)^2\right) = 4f(1) f'\left(f^2(1)\right) f'(1)$$

como $f(1) = 3$, se tiene

$$g'(1) = 4(3) f'\left((3)^2\right) f'(1) = 12f'(9) f'(1)$$

y $f'(1) = 2$; $f'(9) = 1$, con lo que

$$g'(1) = 12(1)(2) = 24.$$

Luego,

$$g'(1) = 24.$$

★

Ejemplo 16.15 *: ¿Cuántas rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{x}{x+1}$ *pasan por el punto* $(2,2)$*? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?.*

Solución : Observemos que este ejemplo se resolvió en la Guía 15, (Ejemplo **??**) calculando la pendiente de la recta tangente, por medio de la definición de derivada de la función en un punto. Repetimos el ejercicio, pero ahora, obteniendo la pendiente de la recta tangente por medio de las reglas de derivación.

Veamos si el punto es de tangencia, para ellos sustituimos $x = 2$ en la función y vemos si da $y = 2$,

$$y = \frac{(2)}{(2)+1} = \frac{2}{3} \neq 2,$$

por lo tanto, $(2,2)$ **no** es punto de tangencia. Sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia, hasta los momentos desconocido. Si $P(x_0, y_0)$ es el punto de tangencia, entonces, sus coordenadas son

$$P(x_0, y_0) = P\left(x_0, \frac{x_0}{x_0+1}\right).$$

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia P viene dada por

$$m_{\tan} = f'(x_0),$$

donde, la derivada de f viene dada por

$$f'(x) = \left[\frac{x}{x+1}\right]' = \frac{[x]'\ (x+1) - x\ [x+1]'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

luego, la pendiente de la recta tangente es $m_{\tan} = f'(x_0) = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ y la ecuación de la recta tangente sería

$$y - y_0 = m_{\tan}\ (x - x_0), \qquad \text{es decir,} \qquad y - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (x - x_0).$$

Puesto que, la recta tangente también pasa por el punto $(2,2)$, entonces este punto debe satisfacer la ecuación de la recta tangente, así,

$$2 - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (2 - x_0),$$

observemos que obtenemos una ecuación en la incognita x_0, por lo que al resolverla se tendrá la abscisa del punto del tangencia y por ende su ordenada, así, como también la pendiente de la recta tangente. Resolvemos

$$2 - \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{(x_0+1)^2}\ (2 - x_0) \qquad \Longrightarrow \qquad 2(x_0+1)^2 - x_0(x_0+1) = (2 - x_0)$$

desarrollando

$$2\left(x_0^2+2x_0+1\right)-x_0^2-x_0=2-x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x_0^2+4x_0+2-x_0^2-x_0-2+x_0=0,$$

es decir,

$$x_0^2+4x_0=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0\left(x_0+4\right)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0=0 \quad \text{y} \quad x_0=-4$$

de aquí,

- Si $x_0=0$, entonces,

$$y_0=\frac{(0)}{(0)+1}=0 \qquad \text{y} \qquad m_{\tan}=f'(0)=\frac{1}{\left((0)+1\right)^2}=1,$$

luego, la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia $(0,0)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ viene dada por

$$y-0=(1)(x-0) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y=x.}$$

- Si $x_0=-4$, entonces,

$$y_0=\frac{(-4)}{(-4)+1}=\frac{4}{3} \qquad \text{y} \qquad m_{\tan}=f'(-4)=\frac{1}{\left((-4)+1\right)^2}=\frac{1}{9},$$

luego, la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{x}{x+1}$ en el punto de tangencia $\left(-4,\dfrac{4}{3}\right)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ viene dada por

$$y-\frac{4}{3}=\left(\frac{1}{9}\right)(x-(-4)) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{9y-x-16=0.}$$

★

Ejercicios

1. Aplique las reglas de derivación para determinar la derivada de cada función (sin usar regla de la cadena)

1. $g(t)=4$ 2. $f(x)=\sqrt{2}$ 3. $g(t)=\pi^2$ 4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{10}}$ 5. $h(x)=\sqrt[5]{7}$

6. $f(x)=5\sqrt[5]{x}$ 7. $h(x)=3\operatorname{sen}x$ 8. $h(t)=\pi\cos t$ 9. $g(x)=4\sqrt[4]{x}$

10. $g(t)=3t^5-5t^2$ 11. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ 12. $f(x)=x\operatorname{sen}x$ 13. $f(x)=\dfrac{7\operatorname{sen}x}{x^2-x}$

14. $g(t)=\cos t+\sqrt{t}$ 15. $f(x)=\tan x$ 16. $h(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$ 17. $f(x)=x\left(x^{-3}+2\right)$

18. $f(x)=\cot x$ 19. $f(w)=\dfrac{\operatorname{sen}(5w)}{5w^3}$ 20. $f(x)=\sec x$ 21. $f(x)=\cot x-\sqrt[7]{3}+\dfrac{1}{x^{\pi}}$

22. $g(x)=\sqrt{2x}\operatorname{sen}x$ 23. $f(t)=2+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{(t-1)^3}$ 24. $g(t)=\sqrt{4t}-\dfrac{t^2}{t+1}$

25. $g(z)=\dfrac{z^2-z}{\sqrt{3z}}$ 26. $h(x)=\csc x$ 27. $f(x)=\sqrt{5x}+\dfrac{3}{\sqrt[5]{2x}}$ 28. $g(t)=\dfrac{t-\csc t}{t^2-t+4}$

29. $f(t) = (2t+3)^2$ 30. $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ 31. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ 32. $y = f(x)\,g(x)\,h(x)$

33. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$ 34. $y = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8t}}$ 35. $g(x) = \dfrac{x - \pi^3 + \operatorname{sen} x}{x^2 + x + 1}$

36. $f(t) = (\tan t + 1)^2$ 37. $f(t) = \dfrac{6t^2}{t+1}$ 38. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$ 39. $g(t) = \dfrac{1}{(2 - 3/t)^2}$

40. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\cot x}$ 41. $g(x) = \cos(2x)$ 42. $f(x) = \sqrt{2px}$ 43. $h(x) = \dfrac{x + 4\operatorname{sen} x}{x^5 - 1/x + 3}$

44. $g(y) = \tan y \cdot \operatorname{sen}(2y)$ 45. $g(x) = x^3 \operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$ 46. $h(x) = \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$

47. $f(t) = \dfrac{2 - 1/t^3}{4 + 1/t^6}$ 48. $f(x) = \tan(2x)$ 49. $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$ 50. $g(x) = \sec(2x)$

51. $y = \dfrac{5\sec x}{x^2 + x}$ 52. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}{x^3 + 4}$ 53. $g(t) = \dfrac{\tan t}{2 + t}$ 54. $w(t) = \dfrac{f(t)\,g(t)}{h(t)}$

55. $f(x) = \operatorname{sen}(3x + \pi) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 56. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - x}$ 57. $h(x) = \sqrt{\sqrt{x} \cdot \operatorname{sen}^4 x}$

58. $h(x) = \dfrac{\sqrt{5} - \cos(x - 2\pi)}{\sqrt{5x} - \sqrt[3]{8x^2}}$ 59. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 3x\right)$ 60. $f(x) = \sqrt[5]{x^\pi \sqrt[3]{x}}$

2. Estudie el signo de la derivada de las siguientes funciones

1. $h(x) = 3x^3 + 2x - 1$ 2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2} + 3$ 3. $f(x) = x - x^4$ 4. $g(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$

5. $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ 6. $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$ 7. $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ 8. $g(x) = 1 + x^{1/3}$

9. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5$ 10. $h(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$ 11. $w(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ 12. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

13. $f(t) = t^{1/3}(6-t)^{2/3}$ 14. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ 15. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ 16. $f(t) = 3t^{4/3} - 4t$

3. Si $y = f(x)$ es una función derivable, calcular las expresiones de la derivada de la función g en cada unos de los siguientes casos

1. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ 2. $g(x) = \dfrac{x^2}{f(x)}$ 3. $g(x) = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$ 4. $g(x) = \dfrac{1 + xf(x)}{x^2}$

5. $g(x) = x^2 f(x)$ 6. $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{f(x)}$ 7. $g(x) = \dfrac{\cos x + xf(x)}{\sqrt{x}}$ 8. $g(x) = \dfrac{x^3 f(x)}{\tan x}$

4. Si $F(2) = 3$; $F'(2) = 4$; $G(2) = 2$ y $G'(2) = 5$; calcular el valor de las derivadas indicadas en $x = 2$

1. $\dfrac{d}{dx}\{F(x) + G(x)\}$ 2. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)\,G(x)\}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{xF(x)}{G(x)}\right\}$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{x + 2F(x)}{x^2 - G(x)}\right\}$

5. Si se conoce que: $F(3) = 2$; $F'(3) = -1$; $G(3) = 3$ y $G'(3) = -4$; en el punto 3 calcular

1. $\dfrac{d}{dx}\{F(x) + G(x)\}$ 2. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)\,G(x)\}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{F(x)}{G(x)}\right\}$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1 + F(x)}{x^2 - G(x)}\right\}$

6. Si $f(2)=1$; $f'(2)=5$; $g(2)=2$; $g'(2)=-3$; y $h(x)=\dfrac{x^2 f(x)}{g(x)}$, calcular el valor de $h'(2)$.

7. Derive las siguientes funciones

1. $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$ 2. $f(x)=\cos(2x)$ 3. $f(x)=\tan(2x)$ 4. $f(x)=\cot(2x)$

5. $f(x)=\operatorname{sen}(\sqrt{x})$ 6. $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x}$ 7. $f(x)=\operatorname{sen}(\cos x)$ 8. $f(x)=\cos(\operatorname{sen}x)$

9. $f(x)=\tan(3x)$ 10. $f(t)=\operatorname{sen}(\pi t)$ 11. $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ 12. $f(x)=\sqrt[4]{1-2x}$

13. $f(x)=\cos(3x)$ 14. $f(x)=\cos^3 x$ 15. $f(x)=\tan(1/x)$ 16. $f(x)=\sec(\sqrt[3]{x})$

17. $f(x)=\sqrt[3]{5x+1}$ 18. $f(t)=\cos\left(2-t^3\right)$ 19. $g(t)=(4-\tan t)^2$

20. $h(x)=\operatorname{sen}^2\left(3x^5+3\right)$ 21. $h(x)=\cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$ 22. $y(x)=\sqrt{\tan(\cos(3x))}$

23. $f(x)=\sqrt{\sec(\sqrt[3]{x})}$ 24. $f(x)=\cot\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)$ 25. $w(z)=G\left(G^2(G(z))\right)$

26. $f(x)=\cos^3\left(\cos^2(4x)\right)$ 27. $g(x)=\tan^4(2\sqrt[3]{\pi x})$ 28. $g(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{(x-2x^3)^{4/3}}$

29. $f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 30. $f(t)=\dfrac{\tan t}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}$ 31. $h(x)=\dfrac{\sqrt{\sec x}+2x}{\cos(\operatorname{sen}(3x))}$

32. $h(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^4\right)}{\operatorname{sen}^4 x}$ 33. $w(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}}$ 34. $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

35. $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}}$ 36. $g(x)=\csc\left(\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)$ 37. $y(t)=\left(\sqrt{t^2+1}+3t\right)^5$

38. $y(t)=\sqrt{\dfrac{t\tan t}{\operatorname{sen}(4t)}}$ 39. $z(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt[3]{\cos x}}-\sqrt{7x}$ 40. $y(t)=\dfrac{\tan\left(\sqrt{t}\right)+\operatorname{sen}(5t)}{t^2\cos(\operatorname{sen}t)}$

41. $f(t)=\dfrac{\left(t^2-t\right)^3}{\cos^5\left(\sqrt{6t}\right)}$ 42. $y(t)=\left(\dfrac{t}{\operatorname{sen}t}+\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{3t+1}}\right)^{-1}$ 43. $y=\left(\dfrac{t^3+\sqrt{\operatorname{sen}t}}{\operatorname{sen}(\cos t)}\right)^5$

44. $g(t)=\operatorname{sen}^3\left(\sqrt{t}-t\right)$ 45. $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x}}$ 46. $y(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(\tan(\sqrt{\operatorname{sen}x}))}{x\cos^4(\operatorname{sen}(x^2))}$

47. $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x}{\pi}-\csc x}$ 48. $g(x)=\sec(2+\sqrt[5]{\pi x})^4$ 49. $f(x)=\sqrt{x^3+\sqrt[3]{x}}$

50. $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x}}$ 51. $f(t)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}$ 52. $f(x)=\sqrt{\cos x}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

53. $f(x)=\operatorname{sen}^4\left(3+\cos\left(\cos^2 x+5\right)\right)$ 54. $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x+\sqrt{\operatorname{sen}x+\sqrt{\operatorname{sen}x}}}$

55. $f(x)=\cos^2\left(\cos^3\left(\cos^4(5x)\right)\right)$

8. Si f es una función diferenciable, determinar $g'(x)$ en cada uno de los casos indicados

1. $g(x)=f\left(x^2\right)$ 2. $g(x)=(f(x))^3$ 3. $g(x)=f(\operatorname{sen}x)$ 4. $g(x)=f(f(x))$

5. $g(x)=f\left(\tan\left(x^2\right)\right)$ 6. $g(x)=f\left(\operatorname{sen}^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)$ 7. $g(x)=f\left(f^3(\operatorname{sen}x)\right)$

8. $g(x)=f\left(\csc\left(x^5\right)\right)$ 9. $g(x)=f\left(\sec^2 x\right)-f\left(\cot^2(f(x))\right)$

9. Si $f(2)=4$; $f(4)=6$; $f(6)=1$; $f'(4)=6$; $f'(2)=-2$; y $f'(6)=1/4$, determinar en el punto $x=2$ el valor de

   1. $\dfrac{d}{dx}(f(x))^3$ 2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{f(x)}\right)$ 3. $\dfrac{d}{dx}(f(f(x)))$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(f\left(x^2\right)\right)\right)$

10. Sean $f(1)=3$; $f'(1)=2$; $f'(9)=1$ y $g(x)=f\left(f^2\left(x^2\right)\right)$, calcular $g'(1)$.

11. Sean

$$F(2)=1; \quad F(4)=2; \quad F(6)=4; \quad F(8)=-\frac{12}{5}; \quad F'(2)=-1; \quad F'(4)=\frac{1}{3};$$
$$F'(6)=3; \quad F'(8)=\frac{1}{9}$$

Si $G(x)=F\left(F^3\left(F\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)\right)\right)$; $H(x)=x^2F\left(x^2\right)$ y $J(x)=G(x)H(x)$, hallar el valor de $J'(2)$.

12. Si $y=f(x)$ y $y=g(x)$ son funciones que admiten derivadas de cualquier orden con respecto a x, hallar las expresiones de $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sabiendo que $y=5f^2(2x)+\dfrac{1}{6}g^3(4x)$.

13. Si f es una función que admite derivada de cualquier orden, hallar

   1. $\dfrac{d}{dx}f(ax)$ 2. $\dfrac{d}{dx}f(-x)$ 3. $\dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 4. $\dfrac{d}{dx}f\left(x^2\right)$ 5. $\dfrac{d^2}{dx^2}f\left(x^2\right)$ 6. $\dfrac{d}{dx}f\left(f\left(x^3\right)\right)$

14. Si f es una función que admite derivada de cualquier orden. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $x=1$, si $y=f^2(f(3x))$ si se conoce que

$$f(1)=1 \quad f'(1)=5 \quad f''(1)=-2 \quad f(2)=-1 \quad f'(2)=2 \quad f''(2)=0$$
$$f(3)=1 \quad f'(3)=1 \quad f''(3)=-\frac{1}{3} \quad f(4)=\frac{1}{2} \quad f'(4)=2 \quad f''(4)=1$$

15. Considere la función $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^4$, verifique que dicha función es solución de la ecuación

$$\left(x^2+1\right)y''+xy'-16y=0.$$

16. Dada la función $y=\sqrt{\sec(2x)}$, verificar que satisface la ecuación $y''=3\left(y^5-y\right)$.

17. Verificar que la función $y=A\cos(nx)+B\operatorname{sen}(nx)$ satisface la ecuación $y''+n^2y=0$, donde A, B y n son constantes.

18. Si $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$, verificar que $\left(x^2+1\right)y''+xy'-n^2y=0$.

19. Si $x=A\cos(\omega t)+B\operatorname{sen}(\omega t)+\dfrac{E}{2\omega}t\operatorname{sen}(\omega t)$ verificar que $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=E\cos(\omega t)$, donde A, B, E y ω son constantes.

20. Determine los valores, reales y/o complejos, de r para los que la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma $y=x^r$, para $x>0$

   1. $x^2y''+4xy'+2y=0$ 2. $x^2y''-4xy'+4y=0$ 3. $x^2y''-xy'+2y=0$
   4. $x^2y''-3xy'+5y=0$ 5. $4x^2y''+y=0$ 6. $x^2y''-5xy'+9y=0$
   7. $x^3y'''+2x^2y''=xy'-y$ 8. $x^3y'''-3x^2y''+xy'=0$ 9. $x^3y^{(4)}+2x^2y'''-xy''+y'=0$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $g'(t)=0$; 1.2. $f'(x)=0$; 1.3. $g'(t)=0$; 1.4. $f'(x)=0$; 1.5. $h'(x)=0$; 1.6. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$;

1.7. $h'(x)=3\cos x$; 1.8. $h'(t)=-\pi\operatorname{sen} t$; 1.9. $g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 1.10. $g'(t)=15t^4-10t$; 1.11. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$;

1.12. $f'(x)=\operatorname{sen} x+x\cos x$; 1.13. $f'(x)=\frac{7\left(x^2-x\right)\cos x-7(2x-1)\operatorname{sen} x}{\left(x^2-x\right)^2}$; 1.14. $g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\operatorname{sen} t$; 1.15. $f'(x)=\sec^2 x$;

1.16. $h'(x)=-\frac{x\operatorname{sen} x+2\cos x}{x^3}$; 1.17. $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$; 1.18. $f'(x)=-\csc^2 x$; 1.19. $f'(w)=\frac{5w\cos(5w)-3\operatorname{sen}(5w)}{5w^4}$;

1.20. $f'(x)=\sec x\tan x$; 1.21. $f'(x)=-\csc^2 x-\frac{\pi}{x^{\pi+1}}$; 1.22. $g'(x)=\frac{\operatorname{sen} x+2x\cos x}{\sqrt{2x}}$; 1.23. $f'(t)=-\frac{1}{t^2}-\frac{3}{(t-1)^4}$;

1.24. $g'(t)=-\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{t}}$; 1.25. $g'(z)=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{3z-1}{2\sqrt{z}}$; 1.26. $h'(x)=-\csc x\cot x$; 1.27. $f'(x)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt[5]{16}}{5x^{6/5}}$;

1.28. $g'(t)=\frac{(1+\csc t\cot t)\left(t^2-t+4\right)-(t-\csc t)(2t-1)}{\left(t^2-t+4\right)^2}$; 1.29. $f'(t)=8t+12$; 1.30. $y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$;

1.31. $f'(x)=2\cos(2x)$; 1.32. $y'=f'(x)\,g(x)\,h(x)+f(x)\,g'(x)\,h(x)+f(x)\,g(x)\,h'(x)$; 1.33. $f'(x)=2\cos(2x)$;

1.34. $y'=\frac{1}{3t^{-4/3}}\left(\sqrt{3}t^{2/3}-1\right)$; 1.35. $g'(x)=\frac{\left(x^2+x+1\right)(1+\cos x)-(2x+1)\left(x-\pi^3+\operatorname{sen} x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; 1.36. $f'(t)=2\left(\tan^2 t+\sec t\right)\sec t$;

1.37. $f'(t)=\frac{12t+6t^2}{(t+1)^2}$; 1.38. $y'=\frac{2-x^{3/4}}{4\sqrt{x}\left(1+x^{3/4}\right)^2}$; 1.39. $g'(t)=\frac{-12t^{-2}+18t^{-3}}{\left(4-12t^{-1}+9t^{-2}\right)^2}$; 1.40. $f'(x)=2\sec x\tan^2 x$;

1.41. $g'(x)=-2\operatorname{sen}(2x)$; 1.42. $f'(x)=\sqrt{\frac{p}{2x}}$; 1.43. $h'(x)=\frac{(1+4\cos x)\left(x^5-1/x+3\right)-(x+4\operatorname{sen} x)\left(5x^4+1/x^2\right)}{\left(x^5-1/x+3\right)^2}$;

1.44. $g'(y)=\sec^2 y\operatorname{sen}(2y)+2\tan y\cos(2y)$; 1.45. $g'(x)=3x^2\operatorname{sen} x+x^3\cos x-\frac{x\cos x-3\operatorname{sen} x}{x^4}$; 1.46. $h'(x)=2\sec x$;

1.47. $f'(t)=\frac{3\left(4t^3+4t^6-1\right)}{t^{10}\left(4+1/t^6\right)^2}$; 1.48. $f'(x)=2\sec^2(2x)$; 1.49. $f'(x)=-2\csc^2(2x)$; 1.50. $g'(x)=2\sec(2x)\tan(2x)$;

1.51. $y'=\frac{5\left(x^2+x\right)\tan x-5(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2\cos x}$; 1.52. $f'(x)=\frac{4\operatorname{sen} x+8x\cos x+2x^4\cos x-5x^3\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}\left(x^3+4\right)^2}$; 1.53. $g'(t)=\frac{(2+t)\sec^2 t-\tan t}{(2+t)^2}$;

1.54. $w'(t)=\frac{\left(f'(t)g(t)+f(t)g'(t)\right)h(t)-f(t)g(t)h'(t)}{h^2(t)}$; 1.55. $f'(x)=-3\cos(3x)$; 1.56. $f'(x)=\frac{4\sqrt{x}-1}{6x^{1/6}\left(\sqrt{x}-x\right)^2}$;

1.57. $h'(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{4x^{3/4}}+x^{1/4}\operatorname{sen}(2x)$; 1.58. $h'(x)=\frac{\left(\sqrt{5x}-\sqrt[3]{8x^2}\right)\operatorname{sen} x-\left(\sqrt{5}-\cos x\right)\left(\frac{5}{2\sqrt{5x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\left(\sqrt{5x}-\sqrt[3]{8x^2}\right)^2}$; 1.59. $g'(x)=-3\cos(3x)$;

1.60. $f'(x)=\frac{3\pi+1}{15}x^{(3\pi-14)/15}$; 2.1. Pos.: $\mathbb{R}$, Neg.: $\varnothing$; 2.2. Pos.: $(-\infty,-4)\bigcup(0,\infty)$, Neg.: $(-4,-2)\bigcup(-2,0)$;

2.3. Pos.: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)$, Neg.: $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2},\infty\right)$; 2.4. Pos.: $(1,\infty)$, Neg.: $(-\infty,0)\bigcup(0,1)$; 2.5. Pos.: $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$,
Neg.: $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$; 2.6. Pos.: $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, Neg.: $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$; 2.7. Pos.: $\varnothing$, Neg.: $\mathbb{R}-\{1\}$; 2.8. Pos.: $\mathbb{R}-\{0\}$, Neg.: $\varnothing$;

2.9. Pos.: $(1,\infty)$, Neg.: $(-\infty,0)\bigcup(0,1)$; 2.10. Pos.: $\left(\sqrt[3]{4},\infty\right)$, Neg.: $\left(0,\sqrt[3]{4}\right)$; 2.11. Pos.: $(-\infty,-2)\bigcup(0,\infty)$,
Neg.: $(-2,0)-\{-1\}$; 2.12. Pos.: $\mathbb{R}-\{-1\}$, Neg.: $\varnothing$; 2.13. Pos.: $(-\infty,2)\bigcup(6,\infty)-\{0\}$, Neg.: $(2,6)$;

2.14. Pos.: $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$, Neg.: $(-1,1)-\{0\}$; 2.15. Pos.: $(0,\infty)$, Neg.: $(-1,0)$; 2.16. Pos.: $(1,\infty)$,
Neg.: $(-\infty,1)$; 3.1. $g'(x)=\frac{xf'(x)+2f(x)}{x^3}$; 3.2. $g'(x)=\frac{2xf(x)+x^2f'(x)}{f^2(x)}$; 3.3. $g'(x)=\frac{xf(x)+2x^2f'(x)-1}{2x^{3/2}}$;

3.4. $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2-xf(x)}{x^3}$; 3.5. $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$; 3.6. $g'(x)=\frac{f(x)-3xf'(x)}{3\sqrt[3]{x^2}f^2(x)}$;

3.7. $g'(x)=\frac{xf(x)+2x^2f'(x)-2x\operatorname{sen} x-\cos x}{2x\sqrt{x}}$; 3.8. $g'(x)=\frac{\left(3x^2f(x)+x^3f'(x)\right)\tan x-x^3f(x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$; 4.1. 9; 4.2. 23;

4.3. -2; 4.4. $\frac{13}{2}$; 5.1. -5; 5.2. -11; 5.3. $\frac{5}{9}$; 5.4. -1; 6. 15; 7.1. $f'(x)=2\cos(2x)$;

7.2. $f'(x)=-2\operatorname{sen}(2x)$; 7.3. $f'(x)=2\sec^2(2x)$; 7.4. $f'(x)=-2\csc^2(2x)$; 7.5. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)$;

7.6. $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$; 7.7. $f'(x)=-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$; 7.8. $f'(x)=-\cos x\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$; 7.9. $f'(x)=3\sec^2(3x)$;

7.10. $f'(t)=\pi\cos(\pi t)$; 7.11. $f'(x)=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$; 7.12. $f'(x)=-\frac{1}{2(1-2x)^{3/4}}$; 7.13. $f'(x)=-3\operatorname{sen}(3x)$;

7.14. $f'(x)=-3\cos^2 x\operatorname{sen} x$; 7.15. $f'(x)=-\frac{\sec^2(1/x)}{x^2}$; 7.16. $f'(x)=\frac{\sec\left(\sqrt[3]{x}\right)\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 7.17. $f'(x)=\frac{5}{(5x+1)^{2/3}}$;

7.18. $f'(t)=3t^2\operatorname{sen}\left(2-t^3\right)$; 7.19. $g'(t)=-2(4-\tan t)\sec^2 t$; 7.20. $h'(x)=15x^4\operatorname{sen}\left(6x^5+6\right)$;

7.21. $h'(x)=-4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen}(2x)$; 7.22. $y'(x)=-\frac{3\sec^2(\cos(3x))\operatorname{sen}(3x)}{2\sqrt{\tan(\cos(3x))}}$; 7.23. $f'(x)=\frac{\sec\left(\sqrt[3]{x}\right)\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{\sec\left(\sqrt[3]{x}\right)}}$;

7.24. $f'(x)=-\frac{2x\csc^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)}{3\left(1+x^2\right)^{2/3}}$; 7.25. $w'(z)=2G'\left(G^2(G(z))\right)G(G(z))\,G'(G(z))\,G'(z)$;

7.26. $f'(x) = 12\cos^2\left(\cos^2(4x)\right)\operatorname{sen}\left(\cos^2(4x)\right)\operatorname{sen}(8x)$; 7.27. $g'(x) = \frac{8\pi\tan^3\left(2\sqrt[3]{\pi x}\right)\sec^2\left(2\sqrt[3]{\pi x}\right)}{3\sqrt[3]{(\pi x)^2}}$;

7.28. $g'(x) = \frac{3\left(x-2x^3\right)\cos x - 4\left(1-6x^2\right)\operatorname{sen} x}{3\left(x-2x^3\right)^{7/3}}$; 7.29. $f'(x) = \cos(1/x) + \frac{1}{x}\operatorname{sen}(1/x)$; 7.30. $f'(t) = \frac{6\left(t+\sqrt{t}\right)\sec^2 t - \tan t}{6\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^{4/3}}$;

7.31. $h'(x) = \frac{\left(\sqrt{\sec x}\tan x + 4\right)\cos(\operatorname{sen}(3x)) + 6\left(\sqrt{\sec x}+2x\right)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(3x))\cos(3x)}{2\cos^2(\operatorname{sen}(3x))}$; 7.32. $h'(x) = \frac{4x^3\cos\left(x^4\right)\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}\left(x^4\right)\cos x}{\operatorname{sen}^5 x}$;

7.33. $w'(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{2x}\right)\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{2x}\cos(2x)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{2x}\operatorname{sen}^{3/2}(2x)}$; 7.34. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$;

7.35. $g'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$; 7.36. $g'(x) = \frac{11}{\sqrt[3]{9}x^{14/3}}\csc\left(\frac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)\cot\left(\frac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)$;

7.37. $y'(t) = 5\left(\sqrt{t^2+1}+3t\right)^4\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3\right)$; 7.38. $y'(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(4t)}{t\tan t}}\,\frac{\left(\tan t + t\sec^2 t\right)\operatorname{sen}(4t) - 4t\tan t\cos(4t)}{\operatorname{sen}^2(4t)}$;

7.39. $z'(x) = \frac{1}{6\sqrt{x}\cos^{4/3}x}\left(3\cos x\cos\left(\sqrt{x}-2\right) + 2\sqrt{x}\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}-2\right)\right) - \frac{7}{2\sqrt{7x}}$;

7.40. $y'(t) = \frac{\left(\frac{\sec^2\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}+5\cos(5t)\right)t\cos(\operatorname{sen} t) - \left(\tan\left(\sqrt{t}\right)+\operatorname{sen}(5t)\right)(2\cos(\operatorname{sen} t) - t\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\cos t)}{t^3\cos^2(\operatorname{sen} t)}$;

7.41. $f'(t) = \frac{3\left(t^2-t\right)^2(2t-1)\cos\left(\sqrt{6t}\right)+5\left(t^2-t\right)^3\operatorname{sen}\left(\sqrt{6t}\right)\frac{3}{\sqrt{6t}}}{\cos^6\left(\sqrt{6t}\right)}$; 7.42. $y'(t) = -\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{3t+1}}\right)^{-2}\left(\frac{\operatorname{sen} t - t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}+\frac{2t+1}{2\sqrt{t}(3t+1)^{4/3}}\right)$;

7.43. $y'(t) = \frac{5}{\operatorname{sen}^2(\cos t)}\left(\frac{t^3+\sqrt{\operatorname{sen} t}}{\operatorname{sen}(\cos t)}\right)^4\left(\left(3t^2+\frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}\right)\operatorname{sen}(\cos t) + \left(t^3+\sqrt{\operatorname{sen} t}\right)\cos(\cos t)\operatorname{sen} t\right)$;

7.44. $g'(t) = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-1\right)\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{t}-t\right)\cos\left(\sqrt{t}-t\right)$; 7.45. $h'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1}{4x^{3/4}}-\frac{2x\operatorname{sen} x+\cos x}{2x^{3/2}}\right)$;

7.46. $y'(x) = \frac{x\cos^4\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\cos\left(\tan\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\right)\sec^2\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \left(\cos^4\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)+8x^2\cos^3\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\cos\left(x^2\right)\right)\operatorname{sen}\left(\tan\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\right)}{x^2\cos^8\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)}$;

7.47. $f'(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\pi}-\csc x\right)^{-4/5}\left(\frac{1}{\pi}+\csc x\cot x\right)$; 7.48. $g'(x) = \frac{4\pi\left(2+\sqrt[5]{\pi x}\right)^3}{5\sqrt[5]{(\pi x)^4}}\sec\left(2+\sqrt[5]{\pi x}\right)^4\tan\left(2+\sqrt[5]{\pi x}\right)^4$;

7.49. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+\sqrt[3]{x}}}\left(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$; 7.50. $h'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{-2/3}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)$;

7.51. $f'(t) = \frac{1}{6t^{7/6}\left(1+\sqrt{t}\right)^{4/3}\left(2+\sqrt[3]{t}\right)^{1/2}}\left(\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}\right)$; 7.52. $f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(1/x)}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}\cos(1/x)}{x^2}$;

7.53. $f'(x) = 4\operatorname{sen}^3\left(3+\cos\left(\cos^2 x+5\right)\right)\cos\left(3+\cos\left(\cos^2 x+5\right)\right)\operatorname{sen}\left(\cos^2 x+5\right)\operatorname{sen}(2x)$;

7.54. $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x+\sqrt{\operatorname{sen} x+\sqrt{\operatorname{sen} x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x+\sqrt{\operatorname{sen} x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)\right)$;

7.55. $f'(x) = -120\cos\left(\cos^3\left(\cos^4(5x)\right)\right)\operatorname{sen}\left(\cos^3\left(\cos^4(5x)\right)\right)\cos^2\left(\cos^4(5x)\right)\operatorname{sen}\left(\cos^4(5x)\right)\cos^3(5x)\operatorname{sen}(5x)$;

8.1. $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$; 8.2. $g'(x) = 3(f(x))^2 f'(x)$; 8.3. $g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x$; 8.4. $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$;

8.5. $g'(x) = 2x\sec^2\left(x^2\right)f'\left(\tan\left(x^2\right)\right)$; 8.6. $g'(x) = \operatorname{sen}(2x)\left(f'\left(\operatorname{sen}^2 x\right) - f'\left(\cos^2 x\right)\right)$;

8.7. $g'(x) = 3\cos x f^2(\operatorname{sen} x)f'\left(f^3(\operatorname{sen} x)\right)$; 8.8. $g'(x) = -5x^4\csc\left(x^5\right)\cot\left(x^5\right)f'\left(\csc\left(x^5\right)\right)$;

8.9. $g'(x) = 2\sec^2 x\tan x f'\left(\sec^2 x\right) + 2\cot^2(f(x))\cot(f(x))f'(x)f'\left(\cot^2(f(x))\right)$; 9.1. -96; 9.2. $\frac{3}{8}$;

9.3. -12; 9.4. 6; 10. 24; 11. 160; 12.*a*. $\frac{dy}{dx} = 20f(2x)f'(2x) + 2g^2(4x)g'(4x)$;

12.*b*. $\frac{d^2y}{dx^2} = 40\left(f'(2x)\right)^2 + 40f(2x)f''(2x) + 16g(4x)\left(g'(4x)\right)^2 + 8g^2(4x)g''(4x)$; 13.1. $af'(ax)$; 13.2. $-f'(-x)$;

13.3. $-\frac{f'(1/x)}{x^2}$; 13.4. $2xf'\left(x^2\right)$; 13.5. $2f'\left(x^2\right)+4x^2f''\left(x^2\right)$; 13.6. $3x^2f'\left(f\left(x^3\right)\right)f'\left(x^3\right)$; 14.*a*. $\frac{dy}{dx} = 30$;

14.*b*. $\frac{d^2y}{dx^2} = 384$; 20.1. $r=-2$, $r=-1$; 20.2. $r=1$, $r=4$; 20.3. $r=1-i$, $r=1+i$;

20.4. $r=2-i$, $r=2+i$; 20.5. $r=\frac{1}{2}$; 20.6. $r=3$; 20.7. $r=\pm 1$; 20.8. $r=0$, $r=3+\sqrt{3}$, $r=3-\sqrt{3}$;

20.9. $r=0$, $r=2$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 17

Derivación implícita.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.17

- Derivadas de orden superior. Derivación implícita.
- Derivada de la inversa de una función.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 17.1 *: Sea* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. *Hallar la sucesión de número* $a_k = f^{(k)}(1)$, *con* $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Solución : Tenemos

$f(x) = \dfrac{x}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad f(1) = \dfrac{(1)}{(1)+1} = \dfrac{1}{2}$
$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = \dfrac{1}{((1)+1)^2} = \dfrac{1}{4}$
$f''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3} \quad \Longrightarrow \quad f''(1) = -\dfrac{2}{((1)+1)^3} = -\dfrac{1}{4}$
$f'''(x) = \dfrac{6}{(x+1)^4} \quad \Longrightarrow \quad f'''(1) = \dfrac{6}{((1)+1)^4} = \dfrac{3}{8}$
$f^{(4)}(x) = -\dfrac{24}{(x+1)^5} \quad \Longrightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\dfrac{24}{((1)+1)^5} = -\dfrac{3}{4}$
$f^{(5)}(x) = \dfrac{120}{(x+1)^6} \quad \Longrightarrow \quad f^{(5)}(1) = \dfrac{120}{((1)+1)^6} = \dfrac{15}{8}$
$f^{(6)}(x) = -\dfrac{720}{(x+1)^7} \quad \Longrightarrow \quad f^{(6)}(1) = -\dfrac{720}{((1)+1)^7} = -\dfrac{45}{8},$

por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{1}{4}, \qquad a_2 = -\frac{1}{4}, \qquad a_3 = \frac{3}{8}, \qquad a_4 = -\frac{3}{4}, \qquad a_5 = \frac{15}{8}, \qquad a_6 = -\frac{45}{8}.$$

★

Ejemplo 17.2 *: Hallar* dy/dx, *para la curva* $\cos(x-y) = y \operatorname{sen} x$.

Solución : Derivamos implicítamente

$$\begin{aligned} (\cos(x-y))' = (y \operatorname{sen} x)' \quad &\Longrightarrow \quad -(x-y)' \operatorname{sen}(x-y) = y' \operatorname{sen} x + y \cos x \\ &\Longrightarrow \quad (1-y') \operatorname{sen}(x-y) = y' \operatorname{sen} x + y \cos x, \end{aligned}$$

despejamos y'

$$\begin{aligned} (1-y') \operatorname{sen}(x-y) = y' \operatorname{sen} x + y \cos x \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(x-y) - y' \operatorname{sen}(x-y) = y' \operatorname{sen} x + y \cos x \\ &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(x-y) - y \cos x = y' \operatorname{sen} x + y' \operatorname{sen}(x-y) \\ &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(x-y) - y \cos x = (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x-y))\, y' \\ &\Longrightarrow \quad y' = \frac{\operatorname{sen}(x-y) - y \cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x-y)}. \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y' = \frac{\operatorname{sen}(x-y) - y\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x-y)}.$$

$\bigstar$

Ejemplo 17.3 *: Hallar dy/dx, para la curva* $x^2y + y^2 = \sqrt{x+y}$.

Solución : Derivamos implicítamente

$$\left(x^2y + y^2\right)' = \left(\sqrt{x+y}\right)' \quad \Longrightarrow \quad \left(x^2y\right)' + \left(y^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}(x+y)'$$

$$\Longrightarrow \quad 2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}},$$

despejamos y'

$$2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} \quad \Longrightarrow \quad 2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{y'}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2y' + 2yy' - \frac{y'}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2xy$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x^2 + 2y - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)y' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2xy$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y} - 1}{2\sqrt{x+y}}\right)y' = \frac{1 - 4xy\sqrt{x+y}}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{1 - 4xy\sqrt{x+y}}{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y} - 1},$$

por lo tanto,

$$y' = \frac{1 - 4xy\sqrt{x+y}}{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y} - 1}.$$

$\bigstar$

Ejemplo 17.4 *: Encuentre los puntos de* $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$, *donde la tangente sea horizontal.*

Solución : Derivamos implicítamente

$$\left(2\left(x^2+y^2\right)^2\right)' = \left(25\left(x^2-y^2\right)\right)' \quad \Longrightarrow \quad 2\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)' = 25\left(x^2-y^2\right)'$$

$$\Longrightarrow \quad 4\left(x^2+y^2\right)(2x+2yy') = 25(2x-2yy')$$

$$\Longrightarrow \quad 8\left(x^2+y^2\right)(x+yy') = 50(x-yy')$$

despejamos y'

$$8\left(x^2+y^2\right)(x+yy') = 50(x-yy') \quad \Longrightarrow \quad 4x\left(x^2+y^2\right) + 4y\left(x^2+y^2\right)y' = 25x - 25yy'$$

$$\Longrightarrow \quad 4y\left(x^2+y^2\right)y' + 25yy' = 25x - 4x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y\left(4x^2+4y^2+25\right)y' = 25x - 4x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{25x - 4x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(4x^2+4y^2+25\right)}.$$

Luego
$$y' = \frac{25x - 4x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(4x^2+4y^2+25\right)}.$$

Buscamos los puntos (x_0, y_0), que pertenecen a la curva tales que, y' se anule
$$\frac{25x_0 - 4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)}{y_0\left(4x_0^2+4y_0^2+25\right)} = 0,$$

de aquí,
$$25x_0 - 4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0\left(25 - 4\left(x_0^2+y_0^2\right)\right) = 0,$$

es decir,
$$x_0 = 0 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad 25 - 4\left(x_0^2+y_0^2\right) = 0.$$

Si $x_0 = 0$, entonces
$$2\left((0)^2+y_0^2\right)^2 = 25\left((0)^2-y_0^2\right) \quad\Longrightarrow\quad 2\left(y_0^2\right)^2 = 25\left(-y_0^2\right) \quad\Longrightarrow\quad 2y_0^4 + 25y_0^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \left(2y_0^2+25\right)y_0^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_0 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2y_0^2+25 = 0,$$

observemos que $2y_0^2 + 25 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, mientras que $y_0 = 0$, no puede ser solución. puesto que
$$y'\,\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{25x_0 - 4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)}{y_0\left(4x_0^2+4y_0^2+25\right)}$$

no está definida allí, por lo tanto $x_0 = 0$ no puede ser solución de $x_0\left(25 - 4\left(x_0^2+y_0^2\right)\right) = 0$.

Si $25 - 4\left(x_0^2+y_0^2\right) = 0$, es decir, $x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{25}{4}$, entonces
$$2\left(x_0^2+y_0^2\right)^2 = 25\left(x_0^2-y_0^2\right) \quad\Longrightarrow\quad 2\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 25\left(x_0^2-y_0^2\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{25}{8} = x_0^2 - y_0^2.$$

Por lo tanto, los puntos de la curva $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$, donde la tangente sea horizontal, son los puntos que están sobre la curva $x^2 - y^2 = \dfrac{25}{8}$. ★

Ejemplo 17.5 *: Encontrar una ecuación de la(s) recta(s) tangente(s) a la curva* $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$ *que pasa(n) a través del punto* $(-1, 3)$.

Solución : Veamos si el punto dado es punto de tangencia, para ello sustituimos en la curva
$$(-1)^2 + 4(3)^2 - 4(-1) - 8(3) + 3 = 20 \neq 0,$$

por lo tanto, el punto $(-1, 3)$ no es punto de tangencia. Sea (x_0, y_0) el punto de tangencia, así, se cumple que
$$x_0^2 + 4y_0^2 - 4x_0 - 8y_0 + 3 = 0,$$

además, $m_{\tan} = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)}$, donde para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ derivamos implicitamente
$$2x - 8y' + 8yy' - 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{2-x}{4y-4},$$

entonces,
$$m_{\tan} = \frac{2-x_0}{4y_0-4}$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = \frac{2 - x_0}{4y_0 - 4}\ (x - x_0)\,,$$

como esta recta debe pasar por el punto $(-1, 3)$, se tiene

$$3 - y_0 = \frac{2 - x_0}{4y_0 - 4}\ (-1 - x_0) \quad \Longrightarrow \quad (3 - y_0)(4y_0 - 4) = (2 - x_0)\ (-1 - x_0)$$

es decir,

$$16y_0 - 4y_0^2 - 12 = x_0^2 - x_0 - 2 \quad \Longrightarrow \quad 16y_0 - 12 + x_0 + 2 = x_0^2 + 4y_0^2 \quad \Longrightarrow \quad 16y_0 - 10 + x_0 = x_0^2 + 4y_0^2$$

como $x_0^2 + 4y_0^2 - 4x_0 - 8y_0 + 3 = 0$, tenemos que $x_0^2 + 4y_0^2 = 4x_0 + 8y_0 - 3$, así,

$$16y_0 - 10 + x_0 = 4x_0 + 8y_0 - 3 \quad \Longrightarrow \quad 8y_0 - 3x_0 - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = \frac{3x_0 + 7}{8}$$

sustituyendo en $x_0^2 + 4y_0^2 - 4x_0 - 8y_0 + 3 = 0$, obtenemos

$$x_0^2 + 4\left(\frac{3x_0 + 7}{8}\right)^2 - 4x_0 - 8\left(\frac{3x_0 + 7}{8}\right) + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{5} \quad \text{y} \quad x_0 = 3,$$

por lo tanto, existen dos puntos de tangencia y en consecuencia, dos rectas tangentes.

Si $x_0 = \frac{1}{5}$, entonces, $y_0 = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right) + 7}{8} = \frac{19}{20}$. Punto de tangencia $\left(\frac{1}{5}, \frac{19}{20}\right)$ y la pendiente es

$$m_{\tan} = \frac{2 - \frac{1}{5}}{4\left(\frac{19}{20}\right) - 4} = -9,$$

luego, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia $\left(\frac{1}{5}, \frac{19}{20}\right)$ es

$$\boxed{y - \frac{19}{20} = -9\left(x - \frac{1}{5}\right)}$$

Si $x_0 = 3$, entonces, $y_0 = \frac{3(3) + 7}{8} = 2$. Punto de tangencia $(3, 2)$ y la pendiente es

$$m_{\tan} = \frac{2 - 3}{4(2) - 4} = -\frac{1}{4},$$

luego, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia $(3, 2)$ es

$$\boxed{y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 3)}$$

★

Ejemplo 17.6 *: Demuestre que si* $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, *entonces* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, *con* $-1 < x < 1$.

Demostración : Es conocido el teorema que establece:

Teorema 1 *: Si* g *es una función diferenciable inyectiva con inversa* $f = g^{-1}$ *y* $g^{-1}(f(x)) \neq 0$, *entonces la función inversa es diferenciable en* x *y*

$$[f(x)]' = \left[g^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Es conocido que, la función inversa de $g(x) = \operatorname{sen} x$, es $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, definida en $-1 \leq x \leq 1$, es decir, $g^{-1}(x) = f(x)$, además si una función g tiene inversa y es diferenciable, entonces g^{-1} es diferenciable y su derivada viene dada por

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

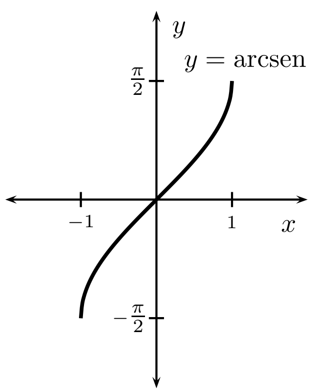
Como $g'(x) = \cos x$, se tiene que

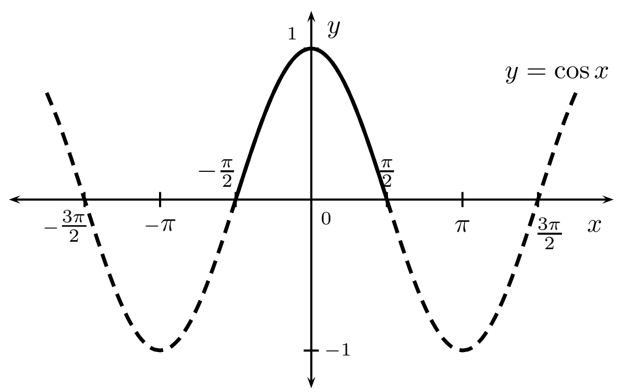
$$\left(g^{-1}(x)\right)' = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)},$$

puesto que,

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1, \qquad \text{entonces,} \qquad \cos(\cdot) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\cdot)},$$

por lo tanto, al componer la expresión del $\cos(\cdot)$ con la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, como $\operatorname{Rgo} f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y el coseno ser positivo en ese intervalo,





se toma la expresión positiva del coseno y se tiene,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2} = \sqrt{1 - x^2},$$

luego,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

definida para $-1 < x < 1$. ★

Ejemplo 17.7 : *Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Solución : Aplicando la regla de la derivada de un cociente, tenemos

$$f'(x) = \left[\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]' = \frac{[\operatorname{arcsen} x]' \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{arcsen} x \left[\sqrt{1 - x^2}\right]'}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2},$$

donde,

$$[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{y} \qquad \left[\sqrt{1 - x^2}\right]' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

así,

$$f'(x) = \left[\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]' = \frac{[\operatorname{arcsen} x]' \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{arcsen} x \left[\sqrt{1 - x^2}\right]'}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x \, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arcsen} x\right)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arcsen} x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}},$$

por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arcsen} x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}.$$

★

Ejemplo 17.8 *: Hallar la derivada de la siguiente función* $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{x^2}\right)$.

Solución : Puesto que f es una función compuesta, aplicamos la regla de la cadena

$$f'(x) = \left[\arctan\left(\frac{1+x}{x^2}\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{x^2}\right)^2}\left[\frac{1+x}{x^2}\right]' = \frac{x^4}{x^4+(1+x)^2}\,\frac{[x+1]'\,x^2-(x+1)\left[x^2\right]'}{\left(x^2\right)^2}$$

$$= \frac{x^4}{x^4+(1+x)^2}\,\frac{x^2-(x+1)(2x)}{x^4} = -\frac{x^2+2x}{x^4+(1+x)^2},$$

por lo tanto,

$$f'(x) = -\frac{x^2+2x}{x^4+(1+x)^2}.$$

★

Ejemplo 17.9 *: Sea* $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ *una función diferenciable que admite inversa en todo su dominio. Hallar* $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Solución : Es conocido que,

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}.$$

Puesto que, f admite inversa, entonces, f es inyectiva, así, existe un $x = x_0 \in \operatorname{Dom} f$, tal que,

$$f^{-1}(0) = x_0, \qquad \text{es decir,} \qquad f(x_0) = 0$$

el cual viene dado por la solución de la ecuación

$$x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1 = 0.$$

Dicha ecuación se puede resolver usando el método de Ruffini ó manipulando algebraicamente la misma, de la siguiente forma

$$x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0^2(x_0-1) + (x_0-1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (x_0-1)\left(x_0^2+1\right) = 0,$$

de aquí, $x_0 = 1$.

Luego,

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(1)},$$

como,

$$f'(x) = \left[x^3 - x^2 + x - 1\right]' = 3x^2 - 2x + 1,$$

entonces,

$$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 1 \quad\Longrightarrow\quad f'(1) = 2,$$

por lo tanto,

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{2}$$

★

Ejemplo 17.10 *: Hallar la ecuación de la recta tangente a f^{-1} en el punto de tangencia $(2,3)$ si se conoce que la ecuación de la recta tangente a f en el punto correspondiente es $y=5x-2$*

Solución : Puesto que, el punto $(2,3)$ es de tangencia, entonces

$$f^{-1}(2)=3 \qquad \Longrightarrow \qquad f(3)=2.$$

Tenemos que $m_{\text{tg}}=f'(3)=5$, así, la pendiente de la recta tangente a f^{-1} viene dada por

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{5},$$

luego, la recta tangente a f^{-1} en el punto $(2,3)$ es

$$y-3=\frac{1}{5}(x-2) \qquad \Longrightarrow \qquad x-5y+13=0.$$

★

Ejercicios

1. Se dice que una función f es **par** si $f(-x)=f(x)$ para todo x en su dominio e **impar** si $f(-x)=-f(x)$ para todo x en su dominio. Demuestre que
   (a) La derivada de una función par es una función impar.
   (b) La derivada de una función impar es una función par.
   (c) La segunda derivada de una función par es una función par.
   (d) La segunda derivada de una función impar es una función impar.
2. Demuestre que $f''(0)$ no existe para $f(x)=x|x|$.
3. Considere la función $f(x)=x^2|x|$. ¿Existe $f''(0)$?
4. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+1$ donde

   a. $f''(x)=f(x)$ *b.* $f'(x)=f''(x)$
5. Si $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x=2$?
6. Sea $f(x)=\arctan x$. Hallar la sucesión de número $a_k=f^{(k)}(0)$, con $k=0,1,2,3,4,5$.
7. Sea $f(x)=\operatorname{arcsen} x$. Hallar la sucesión de número $a_k=f^{(k)}(0)$, con $k=0,1,2,3,4,5$.
8. Sea $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Hallar la sucesión de número $a_k=f^{(k)}(0)$, con $k=0,1,2,3,4,5,6$.
9. Sea $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Hallar la sucesión de número $a_k=f^{(k)}(1)$, con $k=0,1,2,3,4,5,6$.
10. Derive implícitamente, dy/dx, las siguientes curvas

    1. $y\operatorname{sen}(2x)-x\operatorname{sen}y=\dfrac{\pi}{4}$ 2. $x^2+4xy-y^2=19$ 3. $\dfrac{y}{x-y}=x^2+1$ 4. $x^2=\dfrac{y^2}{y^2-x}$

5. $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 7$ 6. $x^2 y + y^2 = \sqrt{x+y}$ 7. $\dfrac{3xy^4 - x^2}{x+y} = 1$ 8. $xy = \cot(xy)$

9. $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 8$ 10. $\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ 11. $\sqrt{xy} - \dfrac{x}{2} = \sqrt{y}$ 12. $x^4 + y^4 = 16$

13. $\cos(x-y) = y \operatorname{sen} x$ 14. $x\cos y + y \operatorname{sen} x = 1$ 15. $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} = 1$ 16. $x^2 = \dfrac{y^2}{y^2-1}$

17. $3x \operatorname{sen} y = y\cos x + 1$ 18. $x + y = \operatorname{sen}(xy)$ 19. $\cos y = y\cos(2x)$ 20. $x = \tan(3y)$

21. $\left(y^3 - x\right)^2 = (x+2)^4$ 22. $x^2 + 2xy = y^2 + 2x$ 23. $3y + \cos y = x^2$ 24. $y^2 = 4x^2 - 8$

25. $\sqrt[3]{xy} + 2xy = 9 + y^2$ 26. $\sqrt{x^2+y^2} + 2y = x^2$ 27. $3x - y^2 = 5y$ 28. $x^\pi = y^2 - 2y$

29. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$ 30. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1$ 31. $\sec y = 3xy + 7$ 32. $2y - y^2 = x^2$

33. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x$ 34. $x \operatorname{sen} y + \cos(2y) = \cos y$ 35. $\sqrt{x}\operatorname{sen} y - \sqrt{y}\operatorname{sen} x = xy$

36. $2xy = \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ 37. $xy = \operatorname{sen}(x+y)$ 38. $y^3 + y^\pi - x\cos\left(x^2y + x^2y^2\right) = y$

39. $\sec\left(\dfrac{x}{y}\right) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y}}$ 40. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(xy^3\right)}{2y} = 1$ 41. $x^4 - \dfrac{6x}{\tan y} = y^4 - 1$ 42. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y} = xy$

43. $y^3 + y - x\sec\left(x^2y + x^2y^2\right) = x$ 44. $x^3 + xy - y^7x^2 = 0$ 45. $x^2y + y^2 = \cot(xy)$

46. $x^3 + xy - y^3 \operatorname{sen}\left(x^2\right) = 20$ 47. $x\operatorname{sen} y + y\sqrt{\operatorname{sen} x - 1} = 1$ 48. $x^5 - \dfrac{6x}{y} = y^5 - 1$

49. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}{x^2y^3} = 1$ 50. $\sqrt{x}\tan y + \sqrt{y}\sec x = \operatorname{sen}(x+y)$ 51. $3y^5 + xy = 4 + y^2\sqrt{x}$

11. Determinar los puntos de la función $2x^2 + y - x - 5 = 0$ para los cuales la tangente pasa por el punto $Q(-1, 10)$.

12. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva $(x-y)^2 = \sqrt{y\operatorname{sen} x + 1}$ en el punto $P(1,0)$.

13. Encuentre y'' si: **a)** $2x^2y - 4y^3 = 4$ en $P(2,1)$; **b)** $\cos\left(x^2y\right) + y^2 = 6$.

14. Encuentre y'' si: **a)** $x^2 + y^2 = 25$ en $P(3,4)$; **b)** $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$.

15. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P dado

1. $\sqrt{y} + xy^2 = 5;\quad P(4,1)$
2. $\operatorname{sen} y = \cos(2x);\quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$
3. $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 6;\quad P(4,1)$
4. $\sqrt{y} = x^3(2-y);\quad P(1,1)$
5. $\operatorname{sen}(xy) = y;\quad P\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$
6. $y + \cos\left(xy^2\right) + 3x^2 = 4;\quad P(1,0)$
7. $x^3y + y^3x = 10x;\quad P(1,2)$
8. $(x-y)^2 = x;\quad P(1,0)$
9. $x\operatorname{sen} y + y\cos x = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}};\quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
10. $y + \tan\left(xy^2\right) + 3x^2 = 4 - x;\quad P(1,0)$
11. $(x-y)^2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + 1;\quad P(1,0)$

16. Encuentre los puntos de $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$, donde la tangente sea horizontal.

17. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$, que pasan por el punto $(12, 3)$.

18. Hay dos rectas tangentes a la curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$ que pasan a través del punto $(-1, 3)$. Encontrar una ecuación de cada una de estas rectas.

19. Hallar el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la curva $\operatorname{sen} y = \cos(2x)$ en un punto de abscisa igual a $\dfrac{\pi}{4}$.

20. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$, donde la pendiente de la recta tangente sea -1.

21. La tangente a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(-3, 4)$ forma un triángulo rectángulo con los ejes coordenados. Calcular su área.

22. Determinar la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ en el punto cuando dicha curva se corta con la recta $y = x$.

23. Calcular las ecuaciones de la recta tangente a la curva que representa $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x + y)$ en el punto de corte de la misma con el eje y en el intervalo $(0, \pi)$.

24. Dada la función $3x^2 - y^2 = 2$, calcular la ecuación de la recta tangente a la misma con pendiente negativa y ordenada en el origen igual a 2.

25. Encuentre dx/dy

1. $y^4 + x^2y^2 + yx^4 = y + 1$	2. Si $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$, encuentre $f'(3)$
3. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = ax^2y$	4. Si $[g(x)]^2 + 12x = x^2g(x)$ y $g(4) = 12$, encuentre $g'(4)$

26. Demuestre que la suma de las intersecciones x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$, es igual a c.

27. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto $(1, 2)$.

28. Verifique que las rectas tangentes a las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en el punto $(1, 2)$ son perpendiculares entre si.

29. Verificar que las rectas tangentes a las curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ y $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ en el origen, son perpendiculares.

30. Encuentre la ecuación de la recta tangente de la curva en el punto o valor indicado

Curva	Punto	Curva	Punto	Curva	Punto
$x^2 + y^3 - 1 = 0$	$x = -2;$	$\tan(2y) = x$	$y = \pi/2;$	$y^3 + 2x = 7y$	$y = 1;$
$x^2 - xy + y^2 = 3$	$x = 0;$	$2y^2 - 2xy = 1$	$x = 1/2;$	$y^2 = x^2 - 4x + 7$	$x = 0;$
$\operatorname{sen} y = x$	$y = \pi/6;$	$\operatorname{sen} y + 2y = x^2$	$y = 0$		

31. Dos curvas se llaman **ortogonales** si en todo punto de intersección sus rectas tangentes son perpendiculares. Demuestre que las curvas dadas son ortogonales

1. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$ 2. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

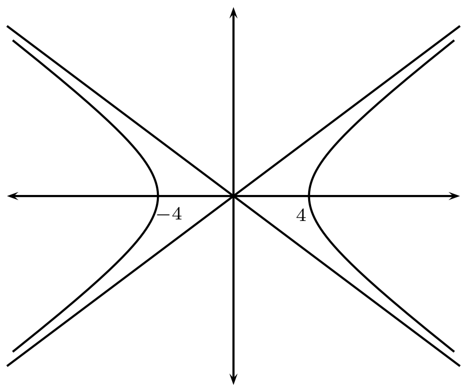
32. Demuestre, utilizando derivación implícita, que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro en 0 es perpendicular al radio OP.

33. Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en el punto de tangencia (x_0, y_0), viene dada por

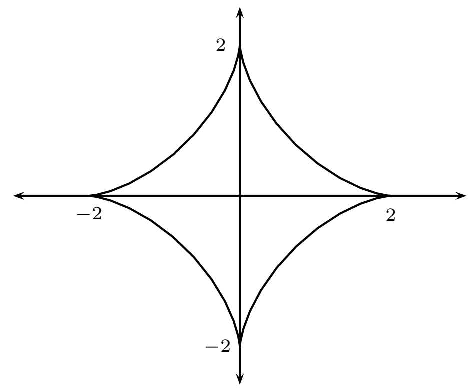
$$y = \frac{a - x_0}{y_0 - b}(x - x_0) + y_0$$

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto de tangencia (x_0, y_0).

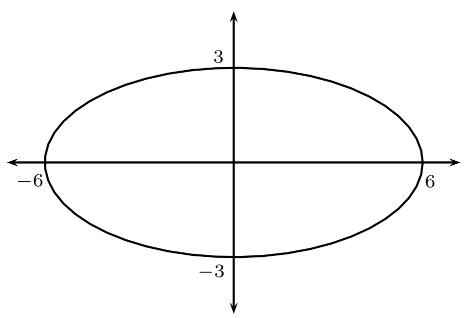
35. En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado



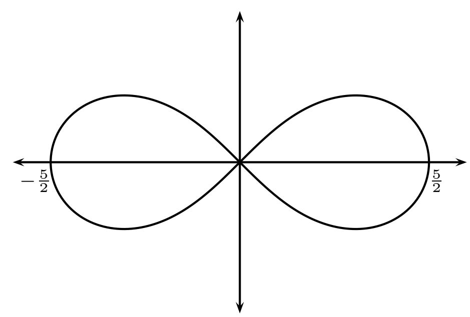
Hipérbola: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \ \left(-5, \dfrac{9}{4}\right)$



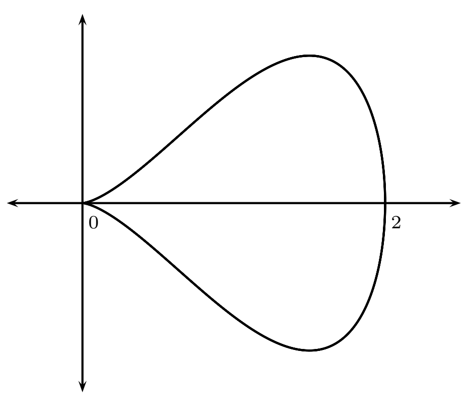
Astroide: $x^{2/3} + y^{2/3} = 4, \ \left(-3\sqrt{3}, 1\right)$



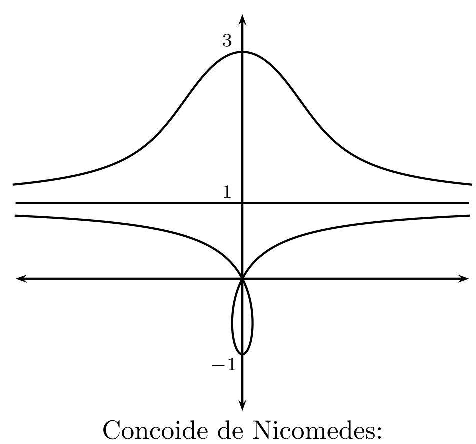
Elipse: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \ \left(4\sqrt{2}, -1\right)$



Lemniscata: $2\left(x^2 + y^2\right)^2 = 25\left(x^2 - y^2\right), \ (3, 1)$



Piriforme: $y^2 = x^3(2 - x), \ (1, 1)$



Concoide de Nicomedes:
$9y^2 = (y-1)^2\left(x^2 + y^2\right), \ (0, -2)$

36. Demuestre que si g es una función diferenciable inyectiva con inversa $f = g^{-1}$ y $g^{-1}(f(x)) \neq 0$, entonces la función inversa es diferenciable en x y

$$[f(x)]' = \left[g^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

37. Usando el resultado del ejercicio 36. Hallar la primera derivada de las funciones inversas de las siguientes funciones

1. $y = \operatorname{sen} x$ 2. $y = \cos x$ 3. $y = \tan x$ 4. $y = \csc x$ 5. $y = \sec x$ 6. $y = \cot x$

38. Derive las siguientes funciones

1. $f(x) = x \arcsin x$
2. $f(x) = \sqrt{x} \arcsin x$
3. $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$
4. $f(x) = \arcsin(\sqrt[3]{x})$
5. $f(x) = x \arctan x$
6. $f(x) = \sqrt{x} \arctan x$
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$
8. $f(x) = \arctan(\sqrt[3]{x})$
9. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$
10. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arctan x}$
11. $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$
12. $f(x) = \sqrt[3]{\arcsin x}$
13. $f(x) = (\arctan x)^4$
14. $f(x) = (\arcsin x)^4$
15. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
16. $f(x) = (\arcsin x - \arctan x)^4$
17. $f(x) = \sec(\arcsin x + \operatorname{sen} x)$
18. $f(x) = \arcsin(1 - \sqrt{x})$
19. $f(x) = \cos(\arcsin x)$
20. $f(x) = \arcsin(\cos x)$
21. $f(x) = \arcsin(\tan x)$
22. $f(x) = \tan(\arcsin x)$
23. $f(x) = \sec(\arcsin x)$
24. $f(x) = \arctan\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$
25. $f(x) = \arctan\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right)$
26. $f(x) = \arctan(\arcsin(\sqrt{x}))$
27. $f(x) = \arcsin(\arctan(\sqrt{x}))$
28. $f(x) = \arctan(\cot x)$
29. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
30. $f(x) = \arcsin(\csc x)$
31. $f(x) = \cot(\arctan x)$
32. $f(x) = \arcsin\left(2x^2 + 5\right)$
33. $f(x) = \csc(\arcsin x)$
34. $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan x)$
35. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\arctan x}$
36. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{5}{\arccos x}\right)$
37. $f(x) = \arcsin(\arccos x)$
38. $f(x) = \arccos\left(2x^5 + 1\right)$
39. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$
40. $f(x) = \arccos(\arcsin x)$
41. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sec^{-1}(3x^2+2)}$
42. $y = \csc^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\arccos x}\right)$
43. $f(x) = \arctan(x \arcsin x)$
44. $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$
45. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x - (\operatorname{sen} x)^{-1}$
46. $f(x) = \tan^{-1} x - (\tan x)^{-1} + \tan^{-1}\left((\tan x)^{-1}\right)$
47. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}}}{\arcsin(\arcsin x)}$
48. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\csc x}{\operatorname{sen}^{-1} x}}$
49. $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)^{-1}$
50. $f(x) = \sqrt{\tan^{-1} x}\,\tan^{-1}\sqrt{x}$
51. $f(x) = \sqrt[4]{\cot^{-1}(\sqrt[3]{x}) + \sqrt{\cot^{-1} x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(x^2\right)$

39. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \arctan x$ cuya pendiente sea igual a $\dfrac{1}{2}$.

40. Si f y $\left(f^{-1}\right)'$ son diferenciables, encuentre una fórmula para $\left(f^{-1}\right)''(x)$.

41. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x

1. $f(x) = x \arctan x, \quad x = 1,$
2. $f(x) = \arcsin(x-1), \quad x = \dfrac{1}{2}.$

42. Sea $f(x) = x - x^2 + x^3 - 1$ una función diferenciable que admite inversa en todo su dominio. Hallar $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

43. Sea $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - 3x$ una función diferenciable que admite inversa para todo $x \in (-\infty, 3)$. Hallar $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

44. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1}$ una función diferenciable que admite inversa para todo $x \in \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$. Hallar $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

45. Hallar la ecuación de la recta tangente a f^{-1} en el punto $(2,1)$ si se conoce que la ecuación de la recta tangente a f en el punto correspondiente es $y = 5x - 2$.

46. Hallar la ecuación de la recta tangente a f^{-1} en el punto $(-2,4)$ si se conoce que la ecuación de la recta tangente a f en el punto correspondiente es paralela a la recta $y = -x - 2$.

47. Hallar la ecuación de la recta tangente a f^{-1} en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ si se conoce que la ecuación de la recta tangente a f en el punto correspondiente es perpendicular a la recta $y = -x - 2$.

48. Hallar la ecuación de la recta tangente a f^{-1} en el punto $(3,-2)$ si se conoce que la ecuación de la recta tangente a f en el punto correspondiente es $y = -5$.

Respuestas: Ejercicios

3. 0; 4.a. $x = 0, \quad x = 10$; 4.b. $x = 6$; 5. $\frac{1}{4}$; 6. $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 24$;

7. $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 9$; 8. $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -3, \quad a_5 = -3, \quad a_6 = 45$;

9. $a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \quad a_4 = -\frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{15}{8}, \quad a_6 = -\frac{45}{8}$; 10.1. $\frac{\operatorname{sen} y - 2y \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x - x \cos y}$; 10.2. $\frac{x+2y}{y-2x}$;

10.3. $\frac{y+2x^3+2xy^2-4yx^2}{x}$; 10.4. $-\frac{2x^3-y^2+2xy^4-4x^2y^2}{2xy}$; 10.5. $\frac{y\left(18x^2-\sqrt[3]{xy}\right)}{x\left(12y^2+\sqrt[3]{xy}\right)}$; 10.6. $\frac{1-4xy\sqrt{x+y}}{2\sqrt{x+y}\left(2y+x^2\right)-1}$;

10.7. $\frac{2xy+x^2-3y^5}{x\left(x+9y^4+12xy^3\right)}$; 10.8. $-\frac{y}{x}$; 10.9. $-\frac{20x^3+6xy^2}{5y^4+6x^2y}$; 10.10. $-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[4]{x^3}}$; 10.11. $\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$; 10.12. $\frac{x^3}{y^3}$;

10.13. $\frac{y\cos x+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen} x}$; 10.14. ; 10.15. $\frac{y}{2x}$; 10.16. $-\frac{x\left(y^2-1\right)^2}{y}$; 10.17. $\frac{y\operatorname{sen} x+3\operatorname{sen} y}{\cos x-3x\cos y}$; 10.18. $\frac{y\cos(xy)-1}{1-x\cos(xy)}$;

10.19. $\frac{2y\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x-\operatorname{sen} y}$; 10.20. $\frac{\cos^2 3y}{3}$; 10.21. $\frac{2(x+2)^3+y^3-x}{3\left(y^3-x\right)y^2}$; 10.22. $\frac{1-x-y}{x-y}$; 10.23. $\frac{2x}{3-\operatorname{sen} y}$; 10.24. $\frac{4x}{y}$;

10.25. $\frac{-y}{2x+x\sqrt[3]{xy}-2y}\left(2+\frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)$; 10.26. $\frac{2x\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\sqrt{x^2+y^2}+y}$; 10.27. $\frac{3}{5+2y}$; 10.28. $\frac{\pi x^{\pi-1}}{2y-2}$; 10.29. $-\frac{\sqrt{xy}+y\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}+x\sqrt{x+y}}$;

10.30. $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(2y)}$; 10.31. $\frac{3x}{\sec y\tan y-3x}$; 10.32. $\frac{x}{1-y}$; 10.33. $\frac{2\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+2x}}\frac{2\sqrt{1+2x}-y-\sqrt{(1+y)(1+2x)}}{x+2\sqrt{(1+2x)(1+y)}}$;

10.34. $\frac{\operatorname{sen} y}{2\operatorname{sen}(2y)-\operatorname{sen} y-x\cos y}$; 10.35. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}\operatorname{sen} y}\frac{1-2y\sqrt{x}\operatorname{sen} y+2\sqrt{xy}\operatorname{sen} y\cos x}{2x\sqrt{y}-2\sqrt{xy}\cos y+\operatorname{sen} x}$; 10.36. $\frac{3x\sqrt{x^2+y^2}-2y}{2x-3y\sqrt{x^2+y^2}}$; 10.37. $\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}$;

10.38. $\frac{\cos\left(x^2y+x^2y^2\right)-x\left(2xy+2xy^2\right)\operatorname{sen}\left(x^2y+x^2y^2\right)}{3y^2+\pi y^{(\pi-1)}-1+x\left(x^2+2x^2y\right)\operatorname{sen}\left(x^2y+x^2y^2\right)}$; 10.39. $\frac{\sec\left(\frac{x}{y}\right)\tan\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}-\frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt{y}}}}{\frac{1}{4\sqrt{\left(x^2+\sqrt{y}\right)y}}+\frac{x}{y^2}\sec\left(\frac{x}{y}\right)\tan\left(\frac{x}{y}\right)}$; 10.40. $\frac{y^4\cos\left(xy^3\right)}{\operatorname{sen}\left(xy^3\right)-3xy^3\cos\left(xy^3\right)}$;

10.41. $\frac{3\cot y-2x^3}{3x\csc^2 y-2y^3}$; 10.42. $\frac{(y\cos y-\cos x)\cos y}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y-x\cos^2 y}$; 10.43. $\frac{1+\sec\left(x^2y+x^2y^2\right)+2x^2y(1+y)\sec\left(x^2y+x^2y^2\right)\tan\left(x^2y+x^2y^2\right)}{3y^2+1-x^3(1+2y)\sec\left(x^2y+x^2y^2\right)\tan\left(x^2y+x^2y^2\right)}$;

10.44. $\frac{2xy^7-y-3x^2}{x-7x^2y^6}$; 10.45. $-\frac{y\left(\csc^2(xy)+2x\right)}{x^2+2y+x\csc^2(xy)}$; 10.46. $\frac{2xy^3\cos\left(x^2\right)-3x^2-y}{x-3y^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)}$; 10.47. $-\frac{y\cos x+2\operatorname{sen} y\sqrt{\operatorname{sen} x-1}}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-1}\left(x\cos y+\sqrt{\operatorname{sen} x-1}\right)}$;

10.48. $\frac{\left(5x^4y-6\right)y}{5y^6-6x}$; 10.49. $\frac{\left(2\operatorname{sen}\left(xy^2\right)-xy^2\cos\left(xy^2\right)\right)y^3}{2xy^2\cos\left(xy^2\right)-3\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}$; 10.50. $\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{2\sqrt{x}\cos(x+y)-2\sqrt{xy}\sec x\tan x-\tan y}{2\sqrt{yx}\sec^2 y+\sec x-2\sqrt{y}\cos(x+y)}$;

10.51. $\frac{\left(y-2\sqrt{x}\right)y}{2\sqrt{x}\left(x+15y^4-2\sqrt{x}y\right)}$; 11. $(1,4), \quad (-3,-14)$; 12. $y = \frac{4(x-1)}{\operatorname{sen} 1+4}$; 13.$a$. -15;

13.b. $\frac{y\left(2x\cos^3 xy+9y^5\operatorname{sen} xy\right)}{\left(x\cos xy+3y^2\right)^3}$; 14.$a$. $-\frac{25}{64}$; 14.b. $\frac{3x^2}{8y}$; 15.1. $17y - 25 + 2x = 0$; 15.2. $y = -2x + \frac{\pi}{2}$;

15.3. $8y-5x+12=0$; 15.4. $y=2x-1$; 15.5. $y=1$; 15.6. $y=6-6x$; 15.7. $13y+4x-30=0$;

15.8. $2y-x+1=0$; 15.9. $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi-4}{\pi+4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 15.10. $y=-7\,(x-1)$; 15.11. $y=\frac{\pi+1}{4}\,(x-1)$;

16. $x^2-y^2=\frac{25}{8}$; 17. $y=3$, $y=\frac{24}{29}x-\frac{837}{145}$; 18. $4y+11x-1=0$ y $4y+x-11=0$; 19. $A=\frac{\pi^2}{16}$;

20. (x_0,x_0) y $\left(x_0,-\frac{1}{2x_0}\right)$, $x_0\neq 0$; 21. $A=\frac{625}{24}$; 22. $y=0$ y $y=1-x$; 23. $y=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x$;

24. $y=-3x+2$; 25.1. $x'=\frac{1-4y^3-x^4-2yx^2}{2y^2x+4yx^3}$; 25.2. $x'=-\frac{x+3y^2x}{y+y^3}$, $f'(3)=-\frac{1}{6}$; 25.3. $x'=\frac{4y\left(x^2+y^2\right)-ax^2}{2axy-4x\left(x^2+y^2\right)}$;

25.4. $x'=\frac{2y-x^2}{2xy-12}$, $g'(4)=\frac{21}{2}$; 27. $y=-2x+4$; 30.1. Para $x^2+y^3-1=0$: $y+\sqrt[3]{3}=\frac{4}{9}\sqrt[3]{3}\,(x+2)$;

30.2. Para $\tan 2y=x$: $2y-x+\pi=0$; 30.3. Para $y^3+2x=7y$: $2y-x+1=0$;

30.4. Para $x^2-xy+y^2=3$: $2y-x-2\sqrt{3}=0$ y $2y-x+2\sqrt{3}=0$;

30.5. Para $2y^2-2xy=1$: $3y-x+2=0$ y $3y-2x+4=0$;

30.6. Para $y^2=x^2-4x+7$: $y=\frac{2}{7}\sqrt{7}x-\sqrt{7}$ y $y=-\frac{2}{7}\sqrt{7}x+\sqrt{7}$; 30.7. Para $\operatorname{sen} y=x$: $y-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

30.8. Para $\operatorname{sen} y+2y=x^2$: $y=0$; 34. $a^2y_0y+b^2x_0x=1$; 35.1. Para $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$: $4y+5x+16=0$;

35.2. Para $x^{2/3}+y^{2/3}=4$: $4y+5x+16=0$; 35.3. Para $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$: $y-4\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x+1)$;

35.4. Para $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$: $13y+9x-40=0$; 35.5. Para $y^2=x^3\,(2-x)$: $y=x$;

35.6. Para $9y^2=(y-1)^2\left(x^2+y^2\right)$: $y=-2$; 37.1. $y'=[\operatorname{arcsen} x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 37.2. $y'=[\arccos x]'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

37.3. $y'=[\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}$; 37.4. $y'=\left[\csc^{-1}x\right]'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; 37.5. $y'=\left[\sec^{-1}x\right]'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$;

37.6. $y'=\left[\cot^{-1}x\right]'=-\frac{1}{1+x^2}$; 38.1. $\operatorname{arcsen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.2. $\frac{\operatorname{arcsen} x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.3. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;

38.4. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-x^{2/3}}}$; 38.5. $\arctan x+\frac{x}{x^2+1}$; 38.6. $\frac{\arctan x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; 38.7. $\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$; 38.8. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$;

38.9. $\frac{1}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arcsen} x}-\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}^2 x}$; 38.10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arctan x}-\frac{\operatorname{arcsen} x}{\left(x^2+1\right)\arctan^2 x}$; 38.11. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcsen} x}\sqrt{1-x^2}}$;

38.12. $\frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arcsen}^2 x}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.13. $\frac{4\arctan^3 x}{x^2+1}$; 38.14. $\frac{4\operatorname{arcsen}^3 x}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.15. $-\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$;

38.16. $4\,(\operatorname{arcsen} x-\arctan x)^3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x^2+1}\right)$; 38.17. $\sec(\operatorname{arcsen} x+\operatorname{sen} x)\tan(\operatorname{arcsen} x+\operatorname{sen} x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\cos x\right)$;

38.18. $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}$; 38.19. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.20. -1; 38.21. $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$; 38.22. $\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$;

38.23. $\frac{\sec(\operatorname{arcsen} x)\tan(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$; 38.24. 0; 38.25. $\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(2x)+1}$; 38.26. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}\left(1+\operatorname{arcsen}^2\sqrt{x}\right)}$;

38.27. $\frac{1}{2\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-\arctan^2\sqrt{x}}}$; 38.28. -1; 38.29. $\sqrt{\frac{(x+1)^2}{2x+1}}\frac{1}{(x+1)^2}$; 38.30. $-\frac{\cot x\csc x}{\sqrt{-\cot^2 x}}$; 38.31. $-\frac{1}{x^2}$;

38.32. $\frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2+5\right)^2}}$; 38.33. $-\frac{1}{x^2}$; 38.34. $\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$; 38.35. $\frac{1}{2\sqrt{x}\arctan x}-\frac{\sqrt{x}}{\left(\arctan^2 x\right)\left(x^2+1\right)}$;

38.36. $-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arccos^2 x-25}\arccos x}$; 38.37. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arccos^2 x}}$; 38.38. $\frac{-10x^4}{\sqrt{1-\left(2x^5+1\right)^2}}$; 38.39. $-\frac{2}{4+x^2}$;

38.40. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2 x}}$; 38.41. $\frac{\cos x\sec^{-1}\left(3x^2+2\right)-\frac{6x\operatorname{sen} x}{\left(3x^2+2\right)\sqrt{\left(3x^2+2\right)^2-1}}}{\left(\sec^{-1}\left(3x^2+2\right)\right)^2}$; 38.42. $-\frac{2x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{2x\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(x^2-\arccos^2 x\right)}}$;

38.43. $\frac{1}{x^2\operatorname{arcsen}^2 x+1}\left(\operatorname{arcsen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; 38.44. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}^2 x}$; 38.45. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\csc x\cot x$;

38.46. $\frac{1}{1+x^2}+\csc^2 x-1$; 38.47. $\frac{\frac{1}{4\sqrt{\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}}}\left(\frac{-\sqrt{x}}{1+x}\right)\operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x)-\frac{\sqrt{\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2 x}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{arcsen}^2(\operatorname{arcsen} x)}$;

38.48. $-\frac{1}{2}\sqrt{\csc x\operatorname{sen}^{-1}x}\frac{\sqrt{1-x^2}\cot x\operatorname{sen}^{-1}x+1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}^2 x}$; 38.49. $-\frac{\sec x\tan x}{\sqrt{1-\sec^2 x}}$; 38.50. $\frac{1}{2\sqrt{\tan^{-1}x}}\frac{1}{1+x^2}\tan^{-1}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{\tan^{-1}x}}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

38.51. $\frac{-1}{4\sqrt[4]{\left(\cot^{-1}\left(\sqrt[3]{x}\right)+\sqrt{\cot^{-1}x}\right)^3}}\left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{\cot^{-1}x}}\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 39. $y+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\,(x+1)$ y $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\,(x-1)$;

41.1. $4y-(\pi+2)\,x+2=0$; 41.2. $y+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$; 42. $\frac{1}{2}$; 43. $-\frac{1}{3}$; 44. 3;

45. $x-5y+13=0$; 46. $x+y-2=0$; 47. $x-6y+5=0$; 48. $x=3$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Aplicación de la derivada.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-1.18**

- Teorema de monotonía. Definición de máximos y mínimos locales y globales.
- Concavidad y puntos de inflexión. Gráfica de una función real.

Ejercicios resueltos

VER GUÍA ADJUNTA.

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.